Liviu Bereteu Ioan Smicală
Alexandru Tocarciuc

EXERCIȚII ŞI PROBLEME

DE MECANICĂ ŞI VIBRAȚII

EDIȚIE ELECTRONICĂ

©Aprilie 2010 - Bereteu L. , Smicală I. , Tocarciuc A.
UPT - Facultatea de Mecanică

PREFAȚĂ

Lucrarea de față se adresează în primul rând studenților din învățământul superior tehnic cu profilul mecanic, dar poate fi folosită şi de studenții de la alte profiluri, care au în planurile de învățământ discipline ca: fundamente de inginerie mecanică, mecanică, cinematica şi dinamica roboților industriali, dinamica maşinilor, vibrații mecanice, calculul dinamic al structurilor etc. Deoarece la toate facultățile şi colegiile universitare din învățământul superior tehnic se predă cel puțin una din aceste discipline, în general se caută ca, în limita orelor de curs şi aplicative disponibile, să se prezinte studenților cât mai multe noțiuni şi metode de studiu ale fenomenelor mecanice ce apar în diverse domenii tehnice. Această tendință a cadrelor didactice poate să conducă la formarea unor specialişti bine pregătiți şi cu un orizont larg în diverse domenii ale tehnicii şi producției, cu condiția ca noțiunile, legile mecanicii şi metodele de studiu prezentate la curs să fie foarte bine înțelese de studenți. Se poate aprecia că lucrarea de față vine în sprijinul cadrelor didactice şi studenților tocmai pentru realizarea acestui deziderat.

Prezenta culegere de probleme a fost structurată pe programele analitice ale disciplinelor de mecanică şi de vibrații mecanice, predate studenților de la Facultatea de Mecanică, la specializările cu profil mecanic. Încadrarea pe capitole a problemelor din această culegere urmăreşte fixarea cunoştințelor din capitolele corespunzătoare ale cursurilor predate, precum şi din capitolele precedente. În fiecare capitol sunt prezentate câteva probleme rezolvate, alese astfel încât să ajute al aprofundarea principalelor noțiuni şi cunoştințe din capitolul corespunzător predat la curs, iar apoi sunt date enunțurile unor probleme nerezolvate, într-o succesiune logică, de la simplu la conex, la care se dau răspunsurile la întrebările din enunț. La unele probleme rezolvate se dau mai multe metode de rezolvare, pentru a se justifica recomandarea de folosire a uneia dintre metodele prezentate, în funcție de anumite condiții.

Se poate aprecia că toate problemele cuprinse în prezenta culegere sunt sugestive pentru aprofundarea cunoştințelor de mecanică şi, în cea mai mare parte, au fost elaborate de autori în vederea realizării acestui deziderat.

Autorii

CUPRINS

PREFAȚĂ.....

1. Statica..... 3

1.1 Reducerea sistemelor de forțe..... 3
1.2 Centre de greutate..... 25
1.3 Echilibrul punctului material..... 36
1.4 Echilibrul corpului rigid..... 47
1.5 Echilibrul sistemelor materiale..... 60

2. Cinematica..... 85

2.1 Cinematica punctului material..... 85
2.2 Cinematica vibratiilor..... 105
2.3 Cinematica corpului rigid..... 116
2.4 Cinematica mecanismelor plane..... 137
2.5 Mişcarea relativă a punctului material..... 151
2.6 Compuneri de mişcări ale corpului rigid..... 159

3. Dinamica..... 172

3.1 Dinamica punctului material..... 172
3.2 Momente de inertie..... 191
3.3 Dinamica sistemelor materiale..... 199
3.4 Ciocniri şi percuții..... 221
3.5 Mecanică analitică..... 233

4. Vibrații mecanice..... 249

4.1 Vibrații lineare ale sistemelor mecanice cu un grad de libertate..... 249
4.2 Vibrații lineare ale sistemelor mecanice cu mai multe grade de libertate..... 277
4.3 Metode aproximative pentru studiul vibrațiilor..... 303

BIBLIOGRAFIE..... 330

1.1. Reducerea sistemelor de forțe

1.1.1. Să se reducă sistemul de 5 forțe concurente, dat mai jos prin expresiile analitice ale forțelor față de sistemul de referință cartezian triortogonal drept Oxyz.

$$\vec{F}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \ , \quad \vec{F}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k} \ , \quad \vec{F}_3 = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \ ,$$
$$\vec{F}_4 = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \ , \quad \vec{F}_5 = -6\vec{i} - 8\vec{j} + 5\vec{k} \ \ [\mathrm{N}] \ .$$

Rezolvare

Metoda I. Se pot determina valorile absolute F_i ale forțelor $\vec{F}_i$, precum şi unghiurile α_{ij} dintre forțele $\vec{F}_i$, $\vec{F}_j$ ale sistemului considerat ($i, j = 1, \ldots, 5 \ ; \ i < j$), pe baza relațiilor cunoscute:

$$F_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2} \ , \quad \alpha_{ij} = \arccos \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{F_i F_j} \ ,$$

astfel încât rezultă:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 5\sqrt{2} = 7{,}07\,\mathrm{N} \ , \quad F_5 = 5\sqrt{5} = 11{,}18\,\mathrm{N} \ ,$$

$$\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} \ , \quad \alpha_{13} = \arccos\frac{9}{25} \ , \quad \alpha_{14} = \arccos\frac{16}{25} \ , \quad \alpha_{15} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \ ,$$

$$\alpha_{23} = \arccos\left(-\frac{16}{25}\right) \ , \quad \alpha_{24} = \arccos\left(-\frac{9}{25}\right) \ , \quad \alpha_{25} = \arccos\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \ ,$$

$$\alpha_{34} = \frac{\pi}{2} \ , \quad \alpha_{35} = \arccos\frac{39\sqrt{10}}{250} \ , \quad \alpha_{45} = \arccos\frac{11\sqrt{10}}{250} \ .$$

Cu acestea, se calculează valoarea absolută a rezultantei:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} F_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{5} F_i F_j \cos\alpha_{ij}} = 15\ \mathrm{N} \ ,$$

precum şi unghiurile α_i dintre rezultantă şi forțele $\vec{F}_i$, pe baza relației:

$$\alpha_i = \arccos \frac{\sum_{j=1}^{5} F_j \cos\alpha_{ij}}{R} ,$$

din care rezultă:

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{\pi}{4} , \quad \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} , \quad \alpha_5 = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} .$$

Metoda II. Proiecțiile rezultantei pe axele de coordonate ale sistemului de referință Oxyz sunt:

$$X = \sum_{i=1}^{5} X_i = 0 , \quad Y = \sum_{i=1}^{5} Y_i = 0 , \quad Z = \sum_{i=1}^{5} Z_i = 15\ \text{N} ,$$

astfel încât rezultă:

$$\vec{R} = 15\vec{k}\ \ [\text{N}] , \quad R = 15\ \text{N} , \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{2} , \quad \gamma = 0 ,$$

unde α, β, (sunt unghiurile făcute de rezultantă cu axele de coordonate. Se observă că, pentru reducerea unui sistem de n forțe concurente, este mai avantajoasă această metodă dacă $n > 3$, deoarece comportă un volum de calcul mai redus față de prima metodă, pentru determinarea valorii absolute şi a direcției rezultantei.

1.1.2. Să se descompună forța $\vec{F} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 9\vec{k}\ [\text{N}]$ după direcțiile (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) date prin vectorii unitari:

$$\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right) , \quad \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) , \quad \vec{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} + \vec{k}\right) .$$

Rezolvare

Metoda I. Din condiția:

$$\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3 ,$$

prin proiectare pe axele de coordonate se obțin ecuațiile:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(F_1 + F_2\right) = 15 , \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\left(F_1 - F_2 + F_3\right) = 12 , \quad \frac{\sqrt{2}}{2}F_3 = 9 ,$$

din care rezultă:

$$F_1 = 9\sqrt{2}\ \text{N} , \quad F_2 = 6\sqrt{2}\ \text{N} , \quad F_3 = 9\sqrt{2}\ \text{N} .$$

Expresiile analitice ale celor 3 componente ale forței $\vec{F}$, dirijate după direcțiile necoplanare date, devin:

$$\vec{F}_1 = 9\left(\vec{i} + \vec{j}\right) , \quad \vec{F}_2 = 6\left(\vec{i} - \vec{j}\right) , \quad \vec{F}_3 = 9\left(\vec{j} + \vec{k}\right) \ [\mathrm{N}] .$$

Metoda II. Din datele problemei se pot determina uşor unghiurile α_{ij} dintre direcțiile date:

$$\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} , \quad \alpha_{23} = \frac{2\pi}{3} , \quad \alpha_{13} = \frac{\pi}{3} ,$$

precum şi unghiurile α_i dintre forța $\vec{F}$ şi direcțiile exprimate analitic prin vectorii unitari $\vec{e}_i$:

$$\alpha_1 = \arccos\frac{\vec{F}\cdot\vec{e}_1}{F} = \arccos\frac{9}{10} , \quad \alpha_2 = \arccos\frac{\vec{F}\cdot\vec{e}_2}{F} = \arccos\frac{1}{10} ,$$

$$\alpha_1 = \arccos\frac{\vec{F}\cdot\vec{e}_3}{F} = \arccos\frac{7}{10} ,$$

unde $F = 15\sqrt{2}$ N este valoarea absolută a forței $\vec{F}$. Pe baza relației:

$$\sum_{j=1}^{3} F_j \cos\alpha_{ij} = F_i \cos\alpha_i ,$$

dând lui i valorile 1, 2, 3, se obțin ecuațiile:

$$F_1 + \frac{F_3}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{2} , \quad F_2 - \frac{F_3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} , \quad \frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{2} + F_3 = \frac{21\sqrt{2}}{2} ,$$

din care rezultă aceleaşi valori F_i ale componentelor forței $\vec{F}$, dirijate după direcțiile date.

Deoarece, pentru a aprecia direcția forței $\vec{F}$ față de cele 3 componente ale sale după direcțiile necoplanare date, este necesar ca şi la prima metodă să se calculeze

unghiurile α_i, se observă că cele două metode prezintă aproximativ acelaşi grad de dificultate.

1.1.3. Placa semicirculară cu centrul O şi de rază $OA = OB = OD = R$ este rotită cu unghiul α ca în fig. 1.1.3 în jurul diametrului său AB, situat pe axa Ox. În punctul P de pe periferia plăcii, determinat prin unghiul β față de raza OD din planul Oyz, acționează forța $\vec{F}$ perpendicular pe planul plăcii.

Să se determine momentul forței în raport cu punctul O.

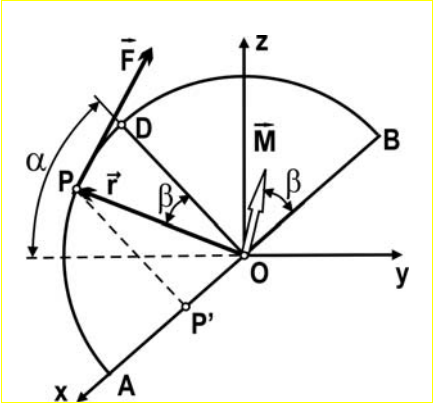


Fig. 1.1.3

Rezolvare

Metoda I. Pe baza definiției momentului unei forțe în raport cu un punct, rezultă imediat că momentul forței $\vec{F}$ în raport cu punctul O este vectorul $\vec{M}$ reprezentat în fig. 1.1.3, situat în planul plăcii, perpendicular pe raza OP şi având valoarea $M = FR$. Descompunând mai întâi acest vector după direcțiile razelor OB şi OD perpendiculare între ele, se obține expresia sa analitică:

$$\vec{M} = -FR\cos\beta\,\vec{i} - FR\cos\alpha\sin\beta\,\vec{j} + FR\sin\alpha\sin\beta\,\vec{k}$$

.

Metoda II. Forța $\vec{F}$ este perpendiculară pe axa Ox, astfel încât se poate descompune uşor după direcțiile celorlalte două axe de coordonate:

$$\vec{F} = F'\vec{j} + F''\vec{k},$$

$$F' = F\sin\alpha,$$

$$F'' = F\cos\alpha.$$

Astfel, momentele forței $\vec{F}$ în raport cu axele de coordonate rezultă:

$$M_x = -F\cdot PP',$$

$$M_y = -F''\cdot OP',$$

$$M_z = F'\cdot OP',$$

$$M_x = -FR\cos\beta,$$

$$M_y = -FR\cos\alpha\sin\beta,$$

$$M_z = FR\sin\alpha\sin\beta,$$

unde P' este proiecția punctului P pe axa Ox. Se observă că momentele forței față de axele de coordonate sunt chiar proiecțiile pe aceste axe ale momentului forței în raport cu originea axelor.

Metoda III. Deoarece coordonatele punctului P de aplicație a forței sunt:

$$x = OP' = R\sin\beta,$$

$$y = -PP'\cos\alpha = -R\cos\alpha\cos\beta,$$

$$z = PP'\sin\alpha = R\sin\alpha\cos\beta,$$

din definiția momentului unei forțe în raport cu un punct se obține:

$$\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ 0 & F' & F''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ R\sin\beta & -R\cos\alpha\cos\beta & R\sin\alpha\cos\beta\\ 0 & F\sin\alpha & F\cos\alpha\end{vmatrix}=$$

$$=FR\cos\beta\left(-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\vec{i}-FR\cos\alpha\sin\beta\vec{j}+FR\sin\alpha\sin\beta\vec{k}=$$

$$=-FR\cos\beta\,\vec{i}-FR\cos\alpha\sin\beta\,\vec{j}+FR\sin\alpha\sin\beta\vec{k}\ .$$

Observație. În această problemă este mai uşor de aplicat prima metodă, deoarece forța este perpendiculară pe vectorul de poziție $\vec{r}=\overline{OP}$. În general, se recomandă aplicarea celei de-a doua metode, atât pentru calculul momentului unei singure forțe în raport cu un punct, dacă brațul forței se determină mai greu, cât şi pentru calculul momentului rezultant al unui sistem de forțe.

1.1.4. Asupra unei piramide regulate, având ca bază pătratul ABCD, vârful V şi toate muchiile de lungime $\ell=0{,}25m$, acționează ca în fig. 1.1.4 un sistem de 7 forțe, exprimate prin:

$$\vec{F}_1=\lambda\overline{AV}\ ,\quad \vec{F}_2=\lambda\overline{DV}\ ,\quad \vec{F}_3=\lambda\overline{VB}\ ,\quad \vec{F}_4=\lambda\overline{VC}\ ,$$

$$\vec{F}_5=\lambda\overline{CA}\ ,\quad \vec{F}_6=\lambda\overline{BD}\ ,\quad \vec{F}_7=\lambda\overline{OV}\ ,$$

unde O este centrul bazei, iar $\lambda=160\ \mathrm{N/m}$.

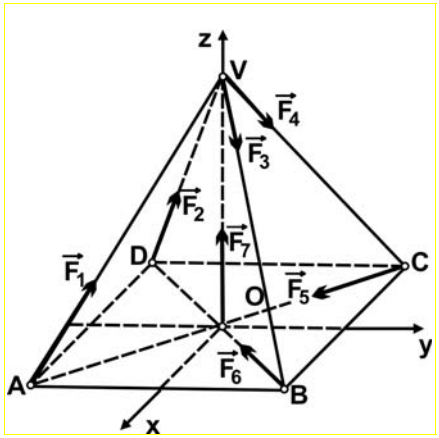


Fig. 1.1.4

a) Să se determine elementele torsorului de reducere în O.

b) Să se arate că sistemul de forțe dat se reduce la o rezultantă unică şi să se determine axa centrală.

c) La ce se reduce un nou sistem de forțe aplicat piramidei, obținut prin adăugarea la sistemul de forțe inițial a forței $\vec{F}_8=\sqrt{2}\lambda\,\overline{AB}/2$ în punctul O? Care vor fi ecuațiile axei centrale în acest caz ?

Rezolvare

a) Se observă că triunghiurile isoscele VAC şi VBD sunt dreptunghice în V, prin urmare $OV=\sqrt{2}\,\ell/2$. Față de sistemul de referință Oxyz, reprezentat în fig. 1.1.4, expresiile analitice ale forțelor sunt:

$$\vec{F}_1 = \lambda\left[\left(0-\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(0+\frac{1}{2}\right)\vec{j}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell-0\right)\vec{k}\right] = 20\left(-\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}\right),$$

$$\vec{F}_2 = \lambda\left[\left(0+\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(0+\frac{1}{2}\right)\vec{j}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell-0\right)\vec{k}\right] = 20\left(\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}\right),$$

$$\vec{F}_3 = \lambda\left[\left(\frac{1}{2}-0\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}-0\right)\vec{j}+\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)\vec{k}\right] = 20\left(\vec{i}+\vec{j}-\sqrt{2}\vec{k}\right),$$

$$\vec{F}_4 = \lambda\left[\left(-\frac{1}{2}-0\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}-0\right)\vec{j}+\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)\vec{k}\right] = 20\left(-\vec{i}+\vec{j}-\sqrt{2}\vec{k}\right),$$

$$\vec{F}_5 = \lambda\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\vec{j}\right] = 40\left(\vec{i}-\vec{j}\right),$$

$$\vec{F}_6 = \lambda\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\vec{j}\right] = 40\left(-\vec{i}-\vec{j}\right),$$

$$\vec{F}_7 = \lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell-0\right)\vec{k} = 20\sqrt{2}\vec{k}\,[\mathrm{N}].$$

Pentru a determina mai simplu elementele torsorului de reducere în O ale sistemului de forțe dat, se dau în continuare două metode de calcul, bazate pe împărțirea acestuia în subsisteme de forțe.

Metoda I. Se observă că primele 4 forțe sunt concurente în V, iar celelalte 3 în O, astfel încât sistemul de forțe dat se poate descompune în două subsisteme de forțe concurente, care se reduc la câte o rezultantă:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4 = 80\vec{j},$$

$$\vec{R}_2 = \vec{F}_5+\vec{F}_6+\vec{F}_7 = -80\vec{j}+20\sqrt{2}\vec{k}\ \ [\mathrm{N}].$$

Momentul rezultant față de O al sistemului de forțe dat va fi egal cu momentul rezultantei $\vec{R}_1$, aplicată în V, deci elementele torsorului de reducere în O sunt:

$$\vec{R} = \vec{R}_1+\vec{R}_2 = 20\sqrt{2}\vec{k}\,[\mathrm{N}],$$

$$\vec{M}_O = \overline{OV}\times\vec{R}_1 = -R_1\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\vec{i} = -10\sqrt{2}\vec{i}\,[\mathrm{Nm}]$$

Metoda II. Se observă că subsistemele formate din forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_4$ și $\vec{F}_5$, respectiv $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ și $\vec{F}_6$, se reduc la câte un cuplu de forțe, deoarece rezultantele lor sunt:

$\vec{F}_1+\vec{F}_4+\vec{F}_5=\lambda\left(\overline{AV}+\overline{VC}+\overline{CA}\right)=\vec{0}$, $\quad \vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_6=\lambda\left(\overline{DV}+\overline{VB}+\overline{BD}\right)=\vec{0}$.

Pentru a calcula momentele acestor cupluri de forțe, care sunt vectori liberi, pentru fiecare subsistem se calculează momentul unei forțe în raport cu punctul de intersecție al celorlalte două, astfel încât rezultă:

$$\vec{M}_1=\overline{VO}\times\vec{F}_5=40\cdot 0{,}25\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}=5\sqrt{2}\left(-\vec{i}-\vec{j}\right),$$

$$\vec{M}_2=\overline{VO}\times\vec{F}_6=40\cdot 0{,}25\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&-1\\-1&-1&0\end{vmatrix}=5\sqrt{2}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)\ \left[\text{Nm}\right].$$

Rezultanta sistemului de forțe dat va fi egală cu $\vec{F}_7$, iar momentul rezultant față de O este egal cu suma vectorială a momentelor celor două cupluri, obținându-se astfel aceleaşi elemente ale torsorului de reducere ca şi prin metoda precedentă.

b) Deoarece produsul scalar dintre rezultantă şi momentul rezultant este nul, sistemul de forțe dat se reduce la rezultanta unică $\vec{R}$ pe axa centrală. Pentru determinarea axei centrale se poate folosi teorema lui Varignon, din care rezultă:

$$\begin{cases}20\sqrt{2}y=-10\sqrt{2}\\-20\sqrt{2}x=0\end{cases},\qquad \begin{cases}x=0\\y=-0{,}5\ \text{m}\end{cases}.$$

c) Expresia analitică a forței $\vec{F}_8$, adăugată în O la sistemul de forțe inițial, este:

$$\vec{F}_8=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\ell\vec{j}=20\sqrt{2}\vec{j}\left[\text{N}\right],$$

astfel încât elementele torsorului de reducere în O ale noului sistem de forțe devin:

$$\vec{R}'=\vec{R}+\vec{F}_8=20\sqrt{2}\left(\vec{j}+\vec{k}\right)\ \left[\text{N}\right],$$

$$\vec{M}'_O=\vec{M}_O=-10\sqrt{2}\vec{i}\ \left[\text{Nm}\right].$$

Se observă că şi în acest caz produsul scalar dintre rezultantă şi momentul rezultant este nul, deci şi noul sistem de forțe se reduce la rezultanta unică $\vec{R}'$, pe noua axă centrală, care se poate determina tot cu ajutorul teoremei lui Varignon:

$$\begin{cases}20\sqrt{2}(y-z)=-10\sqrt{2}\\-20\sqrt{2}x=0\end{cases},\qquad \begin{cases}x=0\\z=y+0{,}5\ \ \left[\text{m}\right]\end{cases}.$$

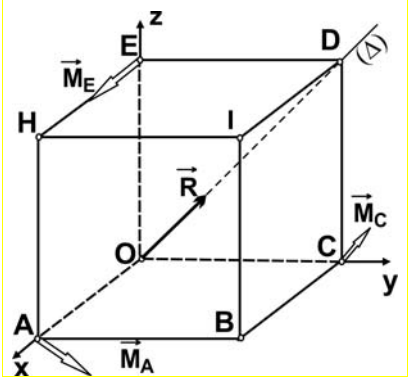


Fig. 1.1.5

1.1.5. Asupra unui cub cu muchiile de lungime ℓ acționează un sistem de forțe, pentru care momentele rezultante în raport cu vârfurile sale A, C şi E sunt:

$$\vec{M}_A = \lambda_1 \overline{EC}\ , \quad \vec{M}_C = \lambda_2 \overline{BC}\ ,$$
$$\vec{M}_E = \lambda_3 \overline{OA}\ ,$$

unde λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt constante pozitive (vezi fig. 1.1.5).

a) Să se determine relațiile dintre λ_1, λ_2 şi λ_3, din condiția ca cele 3 momente rezultante să verifice proprietățile variației torsorului de reducere cu punctul de reducere.

b) Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = F$ să se determine torsorul de reducere în O, torsorul minimal şi axa centrală.

c) Să se determine torsorul de reducere în O, torsorul minimal şi axa centrală pentru un nou sistem de forțe, obținut prin adăugarea la sistemul de forțe inițial a forței $\vec{F}_B = F\overline{BA}/\ell$, aplicată în vârful B al cubului.

Rezolvare

a) În raport cu sistemul de referință Oxyz din fig. 1.1.5, expresiile analitice ale celor 3 momente rezultante sunt:

$$\vec{M}_A = \lambda_1 \ell\left(\vec{j} - \vec{k}\right), \quad \vec{M}_C = -\lambda_2 \ell \vec{i}\ , \quad \vec{M}_E = \lambda_3 \ell \vec{i}\ ,$$

care trebuie să verifice proprietățile variației torsorului de reducere cu punctul de reducere pentru un sistem de forțe aplicat unui corp rigid. Deoarece rezultanta încă nu se cunoaşte, se poate verifica numai proprietatea conform căreia proiecțiile momentelor rezultante în raport cu două puncte de reducere pe dreapta ce unește cele două puncte sunt egale. Această proprietate este verificată pentru perechea de puncte de reducere C şi E, deci mai trebuie să fie impusă pentru celelalte două perechi. Pentru aceasta, se calculează versorii direcțiilor $\overline{EA}$ şi $\overline{AC}$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\overline{EA}}{EA} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} - \vec{k}\right)\ , \quad \vec{e}_2 = \frac{\overline{AC}}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)\ ,$$

apoi se impun condițiile:

$$\vec{M}_E \cdot \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3 \ell = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1 \ell,$$
$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1 \ell = \vec{M}_C \cdot \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_2 \ell,$$

din care rezultă:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ .$$

b) Pe baza formulei de variație a momentului rezultant în raport cu două puncte de reducere se pot scrie relațiile:

$$\begin{cases} \vec{M}_A = \vec{M}_C - \overline{CA} \times \vec{R} \\ \vec{M}_E = \vec{M}_C - \overline{CE} \times \vec{R} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \vec{M}_A - \vec{M}_C = \overline{AC} \times \vec{R} \\ \vec{M}_E - \vec{M}_C = \overline{EC} \times \vec{R} \end{cases},$$

din care rezultă ecuațiile:

$$\ell Z = F\ell \ , \quad \ell Z = F\ell \ , \quad -\ell Y - \ell X = -F\ell \ ,$$
$$\ell Z + \ell Y = 2F\ell \ , \quad -\ell X = 0 \ , \quad -\ell X = 0 \ ,$$

având ca necunoscute proiecțiile X, Y, Z ale rezultantei $\vec{R}$ pe axele de coordonate. De aici se determină:

$$X = 0 \ , \quad Y = Z = F \ , \quad \vec{R} = F\left(\vec{j} + \vec{k}\right) \ ,$$

astfel încât se poate calcula şi momentul rezultant în raport cu originea axelor de coordonate:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_C - \overline{CO} \times \vec{R} = -F\ell\,\vec{i} + \sqrt{2}F\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\,\vec{i} = \vec{0} \ .$$

Rezultă că sistemul de forțe ce acționează asupra cubului se reduce la rezultanta unică $\vec{R}$ pe axa centrală (Δ), care trece prin punctele O şi D, aşa cum s-a reprezentat în fig. 1.1.5.

c) Pentru noul sistem de forțe, elementele torsorului de reducere în O devin:

$$\vec{R}' = \vec{R} + \vec{F}_B = F\left(\vec{j} + \vec{k}\right) - F\,\vec{j} = F\,\vec{k},$$
$$\vec{M}'_O = \vec{M}_O + \overline{OB} \times \vec{F}_B = -F\ell\,\vec{k}.$$

Deoarece se observă că cele două elemente ale torsorului de reducere în O sunt coliniare, având direcția axei Oz, rezultă că ele reprezintă chiar elementele torsorului minimal, iar noua axă centrală este Oz.

1.1.6. Asupra unui paralelipiped dreptunghic, având sistemul de referință Oxyz şi dimensiunile geometrice reprezentate în fig. 1.1.6, acționează 4 subsisteme de forțe paralele şi distribuite, după cum urmează:

1) forțele paralele cu a doua bisectoare a planului Oyz, uniform distribuite pe suprafața OAHG, de intensitate $p_1 = \sqrt{2}\,F/6\ell^2$;

2) forțele paralele cu axa Oz, distribuite pe suprafața OABC, astfel încât pe fâşiile paralele cu axa Ox sunt linear distribuite, iar pe fâşiile paralele cu axa Oy sunt uniform distribuite, de intensitate maximă $p_2 = F/4\ell^2$ pe muchia AB;

3) forțele paralele cu prima bisectoare a planului Oyz, linear distribuite pe muchia GD, de intensitate maximă $p_3 = 2\sqrt{2}\,F/3\ell$ în punctele G şi D;

4) forțele paralele cu axa Oy, distribuite după o semisinusoidă pe muchia CD, de intensitate maximă $p_4 = \pi F/3\ell$ la mijlocul muchiei.

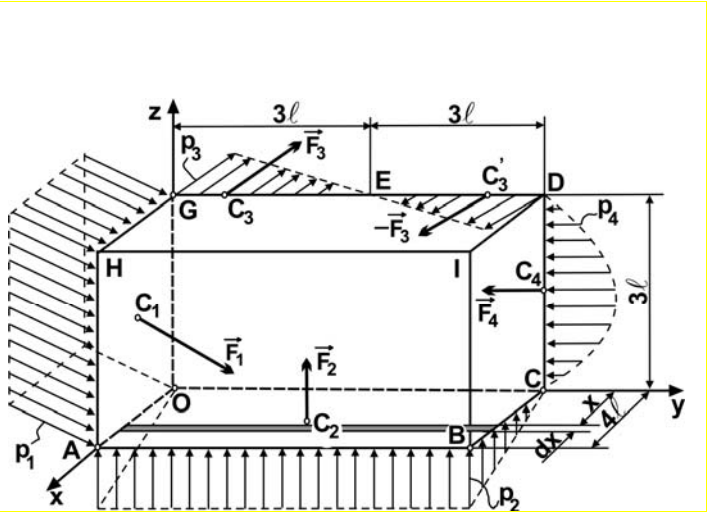


Fig. 1.1.6

a) Să se efectueze reducerea celor 4 subsisteme de forțe paralele şi distribuite.

b) Să se determine torsorul de reducere în O, torsorul minimal şi axa centrală pentru sistemul de forțe ce acționează asupra paralelipipedului.

c) Ce forță $\vec{F}_5$ trebuie aplicată în vârful I al paralelipipedului, astfel încât noul sistem de forțe ce acționează asupra lui să se reducă la un cuplu unic? Care va fi momentul cuplului rezultant în acest caz?

Rezolvare

a)

1) Primul subsistem de forțe paralele şi uniform distribuite se reduce la rezultanta $\vec{F}_1$ în centrul lor $C_1(2\ell, 0, 3\ell/2)$, pentru care rezultă:

$$F_1 = p_{s1}\int dA = p_1 \cdot 4\ell \cdot 3\ell = 2\sqrt{2}F\ , \qquad \vec{F}_1 = F_1\,\vec{e}_1 = 2\sqrt{2}F\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} - \vec{k}\right) = 2F\left(\vec{j} - \vec{k}\right).$$

2) Al doilea subsistem de forțe paralele şi distribuite se va reduce la rezultanta $\vec{F}_2 = F_2\vec{k}$ în centrul $C_2(x_2, 3\ell, 0)$. Pentru determinarea valorii F_2 a acestei rezultante şi a coordonatei x_2 a centrului forțelor paralele, se alege ca element de suprafață o fâşie paralelă cu axa Oy, pe care forțele paralele sunt uniform distribuite. Ca urmare, se obține:

$$p_{s2}(x)=\frac{p_2}{4\ell}x\ ,\quad F_2=\int p_{s2}(x)dA=\frac{p_2}{4\ell}\int_0^{4\ell}x\cdot 6\ell dx=3F\ ,$$

$$x_2=\frac{\int xp_{s2}(x)dA}{\int p_{s2}(x)dA}=\frac{p_2}{4\ell}\frac{6\ell}{3F}\int_0^{4\ell}x^2dx=\frac{8\ell}{3}\ .$$

3) Al treilea subsistem de forțe paralele și distribuite se reduce la un cuplu de forțe, deoarece pe segmentul de dreaptă GE se obține rezultanta $\vec{F}_3=F_3\vec{e}_3$ în centrul $C_3(0,y_3,3\ell)$, iar pe segmentul de dreaptă ED se obține rezultanta $-\vec{F}_3$ în centrul $C_3'(0,6\ell-y_3,3\ell)$. Ca urmare, rezultă:

$$p_{\ell 3}(y)=\frac{p_3}{3\ell}(3\ell-y)\ ,\quad F_3=\frac{p_3}{3\ell}\int_0^{3\ell}(3\ell-y)dy=\sqrt{2}F\ ,$$

$$y_3=\frac{\int_0^{3\ell}yp_{\ell 3}(y)dy}{\int_0^{3\ell}p_{\ell 3}(y)dy}=\frac{p_3}{3\ell}\frac{1}{\sqrt{2}F}\int_0^{3\ell}y(3\ell-y)dy=\ell\ ,$$

$$\vec{F}_3=F_3\,\vec{e}_3=\sqrt{2}F\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j}+\vec{k})=F(\vec{j}+\vec{k})\ ,$$

$$\vec{M}_3=\overline{C_3'C_3}\times\vec{F}_3=-F_3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\ell\,\vec{i}=-4F\ell\,\vec{i}\ .$$

4) Pentru al patrulea subsistem se obține:

$$p_{\ell 4}(z)=p_4\sin\frac{\pi z}{3\ell}\ ,$$

$$F_4=p_4\int_0^{3\ell}\sin\frac{\pi z}{3\ell}dz=2F\ ,$$

deci acesta se reduce la rezultanta $\vec{F}_4=-2F\,\vec{j}$ în centrul forțelor paralele $C_4(0,6\ell,3\ell/2)$.

b) Elementele torsorului de reducere în O sunt:

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_4=2F(\vec{j}-\vec{k})+3F\vec{k}-2F\,\vec{j}=F\vec{k},$$

$$\vec{M}_O=\overline{OC_1}\times\vec{F}_1+\overline{OC_2}\times\vec{F}_2+\vec{M}_3+\overline{OC_4}\times\vec{F}_4=5F\ell\,\vec{i}-4F\ell\,\vec{j}+4F\ell\,\vec{k}.$$

Deoarece $\vec{R}\cdot\vec{M}_O=4F^2\ell\neq 0$, rezultă că sistemul de forțe considerat se reduce la un torsor minimal complet, având elementele:

$$\vec{R}=F\vec{k}\ ,\quad \vec{M}_R=(\vec{M}_O\cdot\vec{k})=4F\ell\,\vec{k}\ .$$

În acest caz, proiecțiile pe axele Ox şi Oy ale rezultantei sunt nule, astfel încât ecuațiile axei centrale rezultă din condițiile:

$$\begin{cases} M_x - yZ = 0 \\ M_y + xZ = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5F\ell - Fy = 0 \\ -4F\ell + Fx = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 4\ell \\ y = 5\ell \end{cases}.$$

c) Din condiția ca noul sistem de forțe să se reducă la un cuplu, se obține:

$$\vec{F}_5 = -\vec{R} = -F\vec{k} \ ,$$

deci momentul cuplului rezultant devine:

$$\vec{M} = \vec{M}_O + \overline{OI} \times \vec{F}_5 = -F\ell\,\vec{i} + 4F\ell\,\vec{k} \ .$$

Observație. Axa centrală (Δ) a sistemului inițial de forțe se află în planul suprafeței ABIH, fiind paralelă cu muchia IB la distanța ℓ de acesta. Prin adăugarea forței $\vec{F}_5$ în I, care are ca suport muchia IB, aceasta şi rezultanta de pe (Δ) formează un cuplu de moment $\vec{M}_1 = -F\ell\,\vec{i}$, prin urmare momentul cuplului rezultant pentru noul sistem de forțe se poate calcula mai uşor ca suma vectorială dintre acest moment şi momentul minimal.

1.1.7. Asupra unui punct material acționează un sistem de 3 forțe, ale căror proiecții pe axele sistemului de referință Oxyz sunt date în tabelul de mai jos.

i	X_i [N]	Y_i [N]	Z_i [N]
1	-200	200	200
2	600	-600	600
3	400	400	-400

a) Să se determine valoarea rezultantei sistemului de forțe şi unghiurile formate de aceasta cu cele 3 forțe ale sistemului, folosind ambele metode analitice pentru reducerea forțelor concurente.

b) Ce forță $\vec{F}_4$, paralelă cu planul Oxy, trebuie aplicată suplimentar punctului material, astfel încât noua rezultantă să formeze cu cele 3 forțe date inițial unghiurile $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = \arccos(1/3)$? Ce unghiuri formează noua rezultantă cu forța $\vec{F}_4$ şi cu axele de coordonate?

Răspunsuri

a) $R = 400\sqrt{5} = 894\,N$, $\alpha_1 = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{15}\right) = 105°$,

$\alpha_2 = \arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5} = 39°$, $\alpha_3 = \arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15} = 75°$.

b) $\vec{F}_4 = 400\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$, $\alpha'_4 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha' = \beta' = \gamma' = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} = 55°$.

1.1.8. Asupra unui corp rigid, raportat la sistemul de referință Oxyz, acționează un sistem de 4 forțe, aplicate în punctele $P_1(2m, -1m, 0)$, $P_2(0, -3m, 0)$, $P_3(-1m, 0, 0)$, $P_4(3m, 2m, 0)$, având expresiile analitice:

$$\vec{F}_1 = 200\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right), \quad \vec{F}_2 = 800\left(-3\vec{i}+4\vec{j}\right), \quad \vec{F}_3 = 400\left(-3\vec{i}+4\vec{j}\right),$$

$$\vec{F}_4 = 1200\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right) \ [\mathrm{N}] .$$

a) Să se arate că cele 4 forțe sunt paralele între ele şi să se calculeze rezultanta lor.

b) Să se determine coordonatele centrului forțelor paralele şi ecuațiile axei centrale.

c) Ce forță $\vec{F}_5$ trebuie aplicată suplimentar într-un punct Q al axei centrale, astfel încât noul sistem de forțe ce acționează asupra corpului să fie în echilibru?

Răspunsuri

a) $\vec{R} = 200\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right) = 1000\vec{e}$ [N] , $\vec{e} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$.

b) $C(22m, 23m, 0)$, $z = 0$, $4x + 3y = 157$ [m] .

c) $\vec{F}_5 = 200\left(-3\vec{i}+4\vec{j}\right) = -1000\vec{e}$.

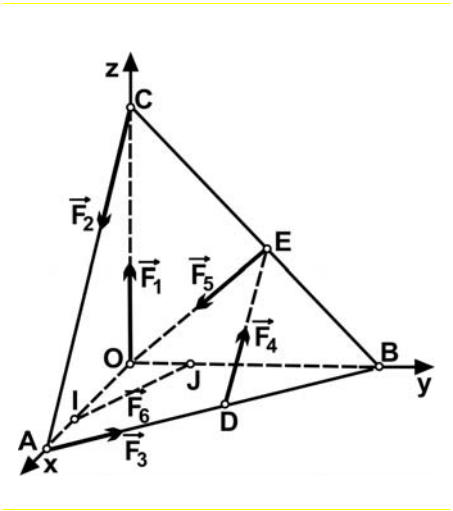


Fig. 1.1.9

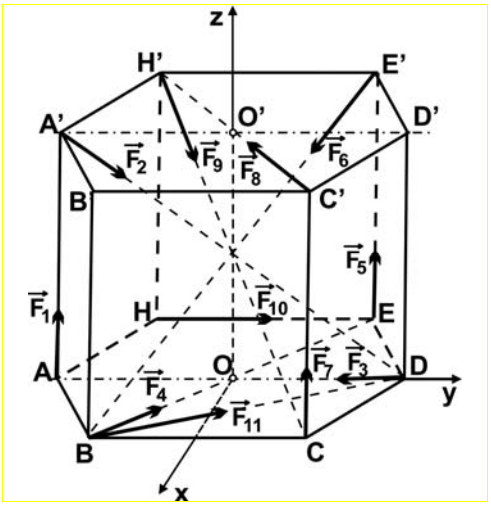


Fig. 1.1.10

1.1.9. Asupra tetraedrului OABC, având muchiile $OA = 4a$, $OB = 8a$ şi $OC = 6a$ perpendiculare între ele, acţionează ca în fig. 1.1.9 un sistem de 5 forţe, care se exprimă prin: $\vec{F}_1 = \lambda\overline{OC}$, $\vec{F}_2 = \lambda\overline{CA}$, $\vec{F}_3 = \lambda\overline{AD}$, $\vec{F}_4 = \lambda\overline{DE}$, $\vec{F}_5 = \lambda\overline{EO}$, unde D şi E sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv BC, iar λ este o constantă pozitivă.

a) Să se arate că sistemul de forţe considerat se reduce la un cuplu de forţe şi să se calculeze momentul cuplului rezultant.

b) La ce se reduce un nou sistem de forţe aplicat tetraedrului, obţinut prin adăugarea la vechiul sistem a forţei $\vec{F}_6 = \lambda\overline{IJ}$ în C ? Punctul I se află pe muchia OA la distanţa $OI = 3a$, iar J se află pe OB la distanţa $OJ = 2a$. În acest caz să se determine elementele torsorului de reducere în O, torsorul minimal şi axa centrală.

Răspunsuri

a) $\vec{M} = 6a^2\lambda\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\right)$.

b) $\vec{R} = -3a\lambda\vec{i} + 2a\lambda\vec{j}$, $\vec{M}_O = 24a^2\lambda\vec{k}$, $z = 0$, $2x + 3y = 24a$.

1.1.10. Se consideră prisma dreaptă din fig. 1.1.10, având ca baze hexagoanele regulate cu centrele O şi O′, pentru care se cunosc lungimile muchiilor $AB = 2a$ şi $AA' = 3a$. Asupra prismei acţionează un sistem de 11 forţe, aplicate în vârfuri ale prismei ca în fig. 1.1.10, care se exprimă prin relaţiile:

$\vec{F}_1 = \lambda\overline{AA'}$, $\vec{F}_2 = \lambda\overline{A'D}$, $\vec{F}_3 = \lambda\overline{DA}$, $\vec{F}_4 = \lambda\overline{BE}$, $\vec{F}_5 = \lambda\overline{EE'}$, $\vec{F}_6 = \lambda\overline{E'B}$,

$\vec{F}_7 = \lambda\overline{CC'}$, $\vec{F}_8 = \lambda\overline{C'H'}$, $\vec{F}_9 = \lambda\overline{H'C}$, $\vec{F}_{10} = \lambda\overline{HE}$, $\vec{F}_{11} = \lambda\overline{BD}$,

unde λ este o constantă pozitivă.

a) Să se arate că primele 9 forţe ale sistemului sunt în echilibru.

b) Să se determine elementele torsorului de reducere în O, torsorul minimal şi axa centrală pentru sistemul de forţe ce acţionează asupra prismei.

c) Ce forţă $\vec{F}_{12}$ trebuie aplicată suplimentar în punctul O′, astfel încât noul sistem de forţe să se reducă la un cuplu unic? Care va fi momentul cuplului rezultant în acest caz?

Răspunsuri

a) Primele 9 forţe din sistemul considerat se reduc la 3 cupluri de forţe, având momentele: $\vec{M}_1 = \overline{DA} \times \vec{F}_1$, $\vec{M}_2 = \overline{BE} \times \vec{F}_5$, $\vec{M}_3 = \overline{H'C} \times \vec{F}_7$, a căror sumă vectorială este nulă.

$\vec{R} = -\sqrt{3}a\lambda\vec{i} + 5a\lambda\vec{j}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$, $z = 0$, $5x + \sqrt{3}y = 0$.

b) $\vec{F}_{12} = \sqrt{3}a\lambda\vec{i} - 5a\lambda\vec{j}$, $\vec{M} = 3a^2\lambda\left(5\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}\right)$.

1.1.11. Asupra unui cub, având muchiile de lungime ℓ, acționează sistemul de 6 forțe din fig. 1.1.11, toate forțele având aceeaşi valoare F.

a) Să se determine elementele torsorului de reducere în O, momentul minimal şi axa centrală pentru sistemul de forțe dat.

b) Dacă la sistemul de forțe considerat se adaugă un cuplu de forțe, având forțele sale situate în planul feței OABC a cubului, ce valoare şi ce sens trebuie să aibă momentul $\vec{M}$ al acestui cuplu, astfel încât noul sistem de forțe să se reducă la o rezultantă unică? Care va fi axa centrală în acest caz?

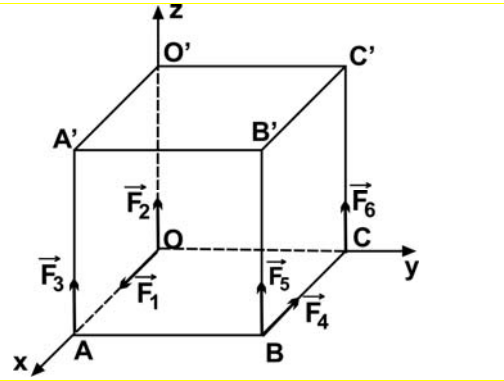


Fig. 1.1.11

Răspunsuri

a) $\vec{R} = 4F\vec{k}$,

$\vec{M}_O = 2F\ell\vec{i} - 2F\ell\vec{j} + F\ell\vec{k}$,

$\vec{M}_R = F\ell\vec{k}$, $x = y = \dfrac{\ell}{2}$.

b) $\vec{M} = -F\ell\vec{k}$, $x = y = \dfrac{\ell}{2}$.

1.1.12. Asupra unui cub, având muchiile de lungime ℓ, acționează un sistem de forțe, format din 4 forțe aplicate în vârfuri ale cubului ca în fig. 1.1.12, precum şi dintr-un cuplu de forțe, având forțele sale situate în planul feței OABC a cubului şi momentul $\vec{M}$. Se cunosc: $F_1 = 4\sqrt{3}F$, $F_2 = \sqrt{2}F$, $F_3 = 3F$, $F_4 = \lambda F$, $M = F\ell$, λ fiind un parametru întreg pozitiv.

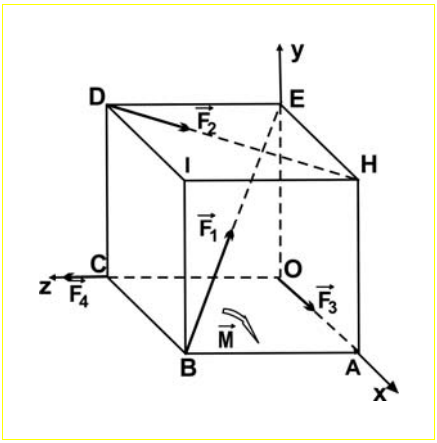


Fig. 1.1.12

a) Pentru $\lambda = 2$ să se determine elementele torsorului de reducere în O, momentul minimal şi axa centrală.

b) Pentru ce valoare a parametrului λ sistemul de forțe se reduce la o rezultantă unică? Care va fi axa centrală?

c) Dacă $\lambda = 5$, ce forță $\vec{F}_5$ trebuie adăugată în E la sistemul de forțe considerat, astfel încât noul sistem de forțe să se reducă la un cuplu unic? Care va fi momentul acestui cuplu?

Răspunsuri

a) $\vec{R} = 4F\vec{j} - 3F\vec{k}$, $\vec{M}_O = -5F\ell\vec{i} + 3F\ell\vec{k}$,

$\vec{R} = 4F\vec{j} - 3F\vec{k}$, $\vec{M}_O = -5F\ell\vec{i} + 3F\ell\vec{k}$, $M_R = -9F\dfrac{\ell}{5}$,

$x = 12\dfrac{\ell}{25}$, $3y + 4z = 5\ell$.

b) $\lambda = 5$,

$x = 3\dfrac{\ell}{4}$, $z = 5\dfrac{\ell}{4}$.

c) $\vec{F}_5 = -4F\vec{j}$,

$\vec{M}'_O = \vec{M}_O + \overline{OE} \times \vec{F}_5 = \vec{M}_O$.

1.1.13. Un sistem de forțe (S_1), care acționează asupra unui corp rigid, se reduce la un torsor minimal complet, având elementele $\vec{R}_1 = F\vec{i}$ şi $\vec{M}_1 = Fd\vec{i}$, pe axa centrală (Δ_1), care trece prin originea sistemului de referință Oxyz. Un alt sistem de forțe (S_2) se reduce la rezultanta unică $\vec{R}_2$ de valoare F pe axa centrală (Δ_2), care este situată în planul Oxy, trece prin O şi formează unghiul α cu axa Ox. Un al treilea sistem de forțe (S_3) se reduce la un cuplu unic de moment $\vec{M}_3$, paralel cu planul Oxy, de valoare $\sqrt{3}Fd$ şi formând unghiurile $\pi/2$ cu (Δ_1), respectiv $\pi/2 + \alpha$ cu (Δ_2). Dacă asupra corpului rigid acționează simultan cele trei sisteme de forțe, se obține un nou sistem de forțe (S).

a) Pentru ce valoare $\alpha_1 \in (0, 2\pi)$ se reduce sistemul de forțe (S) la forma cea mai simplă? În acest caz să se determine elementele torsorului de reducere în O, torsorul minimal şi axa centrală.

b) Pentru ce valoare $\alpha_2 \in (0, 2\pi)$ noul sistem de forțe se reduce la un cuplu unic? Care va fi momentul cuplului rezultant în acest caz?

c) Pentru ce valoare $\alpha_3 \in (0, 2\pi)$ axa centrală a sistemului de forțe (S) trece prin O? La ce se reduce sistemul de forțe (S) în acest caz?

Răspunsuri

a) $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\vec{R} = \frac{3F}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}F}{2}\vec{j}$, $\vec{M}_O = Fd\left(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}\right)$, $M_R = 0$,
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $z = -\frac{2\sqrt{3}}{3}d$.

b) $\alpha_2 = \pi$, $\vec{M} = \vec{M}_O$.

c) $\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$, $\vec{R}' = \frac{F}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}F}{2}\vec{j}$, $\vec{M}'_O = \vec{M}_O$, $M'_R = 2Fd$, $y = -\sqrt{3}x$, $z = 0$.

1.1.14. Asupra unui corp rigid, raportat la sistemul de referință Oxyz, acționează un sistem de forțe (S_1), care se reduce la un torsor minimal complet cu elementele $\vec{R}_1 = F\vec{i}$ și $\vec{M}_1 = -2Fd\vec{i}$ pe axa centrală (Δ_1) ce trece prin punctul $A_1(0, 2d, 0)$. Un alt sistem de forțe (S_2) se reduce la rezultanta unică $\vec{R}_2 = -2F\vec{j}$ pe axa centrală (Δ_2) ce trece prin punctul $A_2(0, 0, d)$. Un al treilea sistem de forțe (S_3) se reduce la un cuplu unic de moment $\vec{M}_3 = Fd\left(\vec{i} + \lambda\vec{j} + 2\vec{k}\right)$, unde λ este un parametru rațional. Dacă asupra corpului rigid acționează simultan cele trei sisteme de forțe, se formează un nou sistem (S).

a) Pentru ce valoare λ_1 a parametrului λ noul sistem de forțe se reduce la forma cea mai simplă? În acest caz să se determine elementele torsorului de reducere în O, torsorul minimal şi axa centrală.

b) Pentru ce valoare λ_2 a parametrului λ axa centrală a sistemului de forțe (S) tece prin O? Să se determine şi în acest caz elementele torsorului de reducere în O, torsorul minimal şi axa centrală.

Răspunsuri

a) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\vec{R} = F\left(\vec{i} - 2\vec{j}\right)$, $\vec{M}_O = Fd\left(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$, $M_R = 0$,
$y = -2x$, $z = \frac{d}{2}$.

b) $\lambda_2 = -2$,

$\vec{R}' = \vec{R}$, $\vec{M}'_O = Fd\left(\vec{i} - 2\vec{j}\right)$, $M'_R = \sqrt{5}Fd$,

$y = -2x$, $z = 0$.

1.1.15. Asupra unui cub cu muchiile de lungime ℓ acționează un sistem de forțe. Reducând acest sistem de forțe în vârfurile sale B, D şi E, se obțin momentele rezultante:

$$\vec{M}_B = \lambda_1 \overline{BC} \ , \quad \vec{M}_D = \lambda_2 \overline{CD} \ , \quad \vec{M}_E = \lambda_3 \overline{HE} \ ,$$

unde λ_1, λ_2, λ_3 sunt constante pozitive (vezi fig. 1.1.15).

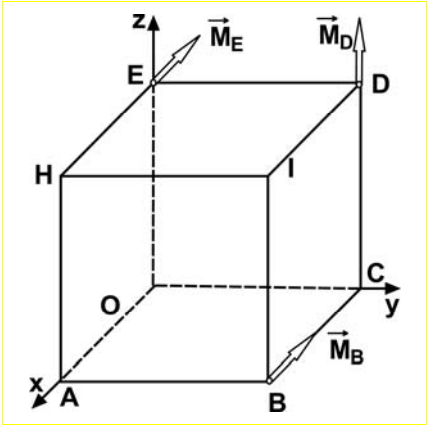


Fig. 1.1.15

a) Să se stabilească relațiile dintre λ_1, λ_2 şi λ_3 din condiția ca cele 3 momente rezultante să verifice proprietățile variației torsorului de reducere cu punctul de reducere.

b) Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = F$ să se determine rezultanta sistemului de forțe, momentul rezultant în raport cu O, momentul minimal şi axa centrală.
Să se calculeze coordonatele punctului Q din planul Oxy prin care trece axa centrală.

c) Ce forță $\vec{F}_Q$ trebuie adăugată sistemului inițial de forțe în punctul Q, astfel încât noul sistem de forțe să se reducă la un cuplu unic? Care va fi momentul cuplului rezultant?

Răspunsuri

a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

b) $\vec{R} = F\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$, $\vec{M}_O = F\ell\left(-2\vec{i} + \vec{j}\right)$, $M_R = -\frac{\sqrt{3}}{3}F\ell$,

$z = \frac{5\ell}{3} - y = -5x + 4y$, $Q\left(\frac{4\ell}{3}, \frac{5\ell}{3}, 0\right)$.

c) $\vec{F}_Q = F\left(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$, $\vec{M} = \vec{M}_R = -\frac{F\ell}{3}\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$.

1.1.16. Se consideră piramida regulată VABCD, având ca bază pătratul ABCD, vârful V şi toate muchiile de lungime ℓ, asupra căreia acționează un sistem de forțe. Momentele rezultante ale acestui sistem de forțe în raport cu vârfurile A, B şi C ale piramidei se exprimă prin relațiile:

$$\vec{M}_A = \lambda_1 \overline{AV} \ , \quad \vec{M}_B = \lambda_2 \overline{AB} + \lambda_3 \overline{AD} \ , \quad \vec{M}_C = \sqrt{2} F \overline{AC} \ ,$$

unde λ_1, λ_2 şi λ_3 sunt constante pozitive.

a) Să se determine parametrii λ_1, λ_2, λ_3 şi să se exprime analitic cele 3 momente rezultante în raport cu sistemul de referință Oxyz cu originea în centrul bazei, având axele Ox şi Oy paralele şi de acelaşi sens cu vectorii $\overline{DA}$, respectiv $\overline{AB}$.

b) Pentru sistemul de forțe considerat, să se determine elementele torsorului de reducere în O, momentul minimal şi axa centrală.

Răspunsuri

a) $\lambda_1 = 2\lambda_2 = 2\lambda_3 = 2\sqrt{2}F$,
$\vec{M}_A = \sqrt{2}F\ell\left(-\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}\right)$, $\vec{M}_B = \vec{M}_C = \sqrt{2}F\ell\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)$.

b) $\vec{R} = -2F\vec{i}$, $\vec{M}_O = F\ell\left(-\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}\right)$, $\vec{M}_R = -\sqrt{2}F\ell\vec{i}$,
$y = \dfrac{\ell}{2}$, $z = \dfrac{\sqrt{2}\ell}{2}$.

1.1.17. Asupra unui corp rigid, raportat la sistemul de referință Oxyz, acționează un sistem de forțe. Dacă se reduce acest sistem de forțe în O, se obține o rezultantă unică. Dacă se efectuează reducerea în punctul $A(\ell,0,\ell)$, se obține momentul rezultant $\vec{M}_A$ de valoare $M_A = 4F\ell$, care formează cu axa Ox unghiul $\alpha_1 = \pi/4$. Făcând reducerea sistemului de forțe în punctul $B(3\ell,4\ell,0)$ rezultă un moment rezultant $\vec{M}_B$ ce formează cu axa Ox unghiul $\alpha_2 = \arccos(-0{,}8)$. Să se determine:

a) rezultanta sistemului de forțe şi valoarea ei;
b) expresiile analitice ale momentelor rezultante $\vec{M}_A$ şi $\vec{M}_B$;
c) ecuațiile axei centrale.

Răspunsuri

a) $\vec{R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\right)$, $R = \sqrt{17}F = 4{,}123F$;

b) $\vec{M}_A = 2\sqrt{2}F\ell\left(\vec{i}-\vec{k}\right), \quad \vec{M}_B = \frac{3\sqrt{2}}{2}F\left(-4\vec{i}+3\vec{j}\right)$;

c) $z = x = \frac{3}{4}y$.

1.1.18. Asupra unui corp rigid, raportat la sistemul de referinţă Oxyz, acţionează un sistem de forţe, pentru care se dau momentele rezultante în raport cu punctele A, B şi C după cum urmează:

$$A(2\ell,2\ell,0), \qquad \vec{M}_A = F\ell\left(-2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}\right),$$
$$B(\ell,\ell,2\ell), \qquad \vec{M}_B = F\ell\left(4\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}\right),$$
$$C(\ell,0,3\ell), \qquad \vec{M}_C = F\ell\left(8\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}\right).$$

Să se determine:

a) elementele torsorului de reducere în O;

b) momentul minimal şi axa centrală;

c) forţa suplimentară $\vec{F}_E$ şi punctul ei de aplicaţie E de pe axa Ox, adăugată sistemului iniţial de forţe, astfel încât noul sistem să se reducă la o rezultantă unică paralelă cu Oz şi trecând prin punctul $D(0,\ell,0)$. În acest caz să se determine noua rezultantă şi noua axă centrală.

Răspunsuri

a) $\vec{R} = F\left(-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right), \quad \vec{M}_O = 2F\ell\left(\vec{i}+5\vec{k}\right)$;

b) $\vec{M}_R = 6F\ell$, $\quad z = 10\ell - 4x - y = \frac{4}{5}(y-\ell) - \frac{2}{5}x$;

c) $\vec{F}_E = F\vec{i} - 2F\vec{j}$, $\quad x_E = 5\ell$, $\quad \vec{R}' = 2F\vec{k}$, $\quad x = 0$, $\quad y = \ell$.

1.1.19. Pentru amenajarea hidroenergetică a unui râu de munte, se construieşte un baraj din beton armat, având forma unei prisme drepte, cu secţiunea transversală de formă trapezoidală şi cu dimensiunile geometrice din fig. 1.1.19. Se cunosc: lungimea barajului $\ell = 30\text{m}$, înălţimea $a = 17{,}5\text{ m}$, lăţimea $b = 6{,}25\text{ m}$, densitatea medie a betonului armat $\rho_b = 7{,}4\cdot 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3$, densitatea apei $\rho_a = 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3$, adâncimea apei în amonte $H = 15\text{ m}$, în aval $h = 1{,}25\text{ m}$, acceleraţia gravitaţională $g = 10\ \text{m}/\text{s}^2$ şi presiunea atmosferică $p_0 = 10^5\ \text{N}/\text{m}^2$.

a) Să se reducă cele 3 sisteme de forţe paralele distribuite ce acţionează asupra barajului, şi anume forţele distribuite volumetric, datorită greutăţilor volumelor

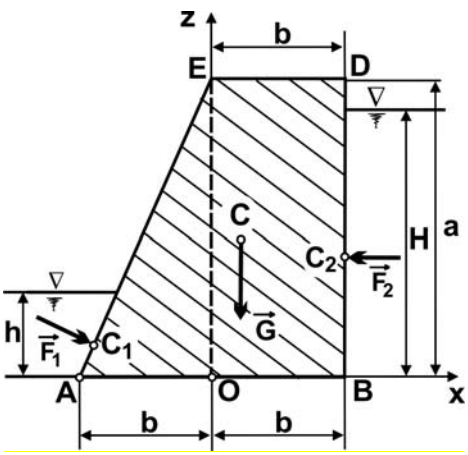


Fig. 1.1.19

elementare din compoziția barajului, precum şi forțele distribuite pe suprafețele plane laterale ale barajului, datorită presiunii apei din amonte şi aval.

b) Pentru întregul sistem de forțe ce acționează asupra barajului, să se determine rezultanta, momentul rezultant față de centrul O al bazei barajului, precum şi axa centrală. Să se verifice stabilitatea barajului, determinând distanța OI şi comparând-o cu b, I fiind punctul de intersecție dintre axa centrală şi planul bazei.

c) Pentru cazul cel mai defavorabil de solicitare a barajului, în care în amonte apa urcă până la înălțimea barajului, să se verifice din nou stabilitatea barajului, determinând distanța până la O a punctului J de intersecție dintre noua axă centrală şi planul bazei barajului.

Răspunsuri

a) $G = 364{,}22 \cdot 10^6$ N , $x_C = 1{,}389$ m , $z_C = 7{,}778$ m ,
$F_1 = 4{,}22 \cdot 10^6$ N , $x_1 = -6{,}031$ m , $z_1 = 0{,}613$ m ,
$F_2 = 78{,}75 \cdot 10^6$ N , $x_2 = 6{,}25$ m , $z_2 = 6{,}429$ m .

b) $\vec{R} = -\left(74{,}77\vec{i} + 365{,}64\vec{k}\right)\ \left[10^6 \text{N}\right]$, $\vec{M}_O = -6{,}5\vec{j}\ \left[10^6 \text{Nm}\right]$,
$-365{,}64x + 74{,}77z = 6{,}5\ \left[\text{m}\right]$, $OI = 0{,}018 \text{ m} << b$.

c) $\vec{R}' = -\left(110{,}86\vec{i} + 365{,}64\vec{k}\right)\ \left[10^6 \text{N}\right]$, $\vec{M}'_O = -350\vec{j}\ \left[10^6 \text{Nm}\right]$,
$OJ = 0{,}957 \text{ m} < b$.

1.1.20. Asupra unui cadru spațial de greutate neglijabilă, raportat la sistemul de referință Oxyz, având forma şi dimensiunile din fig. 1.1.20, acționează 5 sisteme de forțe distribuite, precum şi forța concentrată $\vec{F}_6$, aplicată în A, paralelă cu axa Ox de valoare $5F/2$. Forțele uniform distribuite pe arcul de cerc IJ sunt concurente în O, iar forțele uniform distribuite pe segmentul de dreaptă DE sunt paralele cu axa Oz′, care este a doua bisectoare a planului Oyz.

a) Să se reducă cele 5 sisteme de forțe distribuite, determinând rezultantele lor şi coordonatele punctelor lor de aplicație față de sistemul de referință considerat.

b) Pentru întregul sistem de forțe ce acționează asupra cadrului, să se determine elementele torsorului de reducere în O, momentul minimal şi axa centrală.

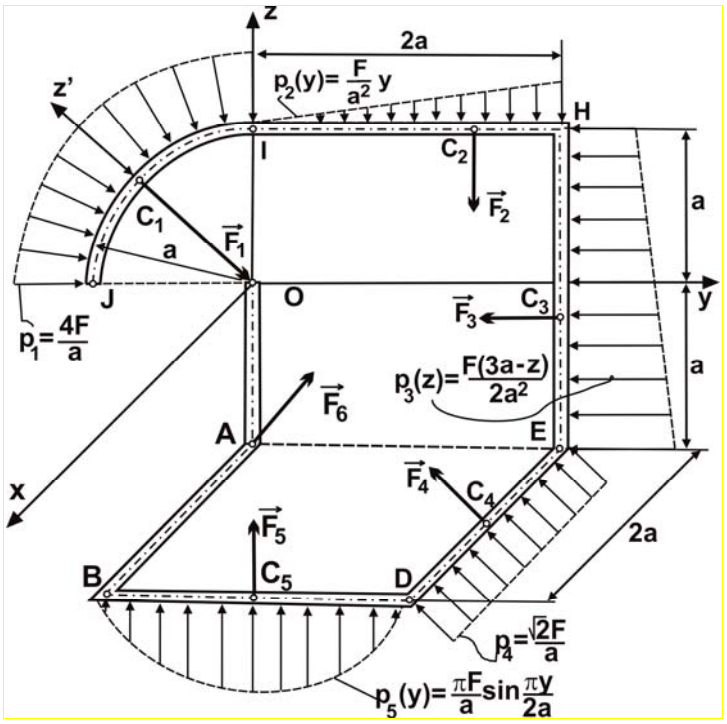


Fig. 1.1.20

Răspunsuri

a) $\vec{F}_1 = 4F\left(\vec{j}-\vec{k}\right)$, $C_1\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\vec{F}_2 = -2F\vec{k}$, $C_2\left(0, \frac{4}{3}a, a\right)$,

$\vec{F}_3 = -3F\vec{j}$, $C_3\left(0, 2a, -\frac{1}{9}a\right)$, $\vec{F}_4 = 2F\left(-\vec{j}+\vec{k}\right)$, $C_4\left(a, 2a, -a\right)$,

$\vec{F}_5 = 4F\vec{k}$, $C_5\left(2a, a, -a\right)$.

b) $\vec{R} = -F\left(\frac{5}{2}\vec{i}+\vec{j}\right)$, $\vec{M}_O = Fa\left(3\vec{i}-\frac{15}{2}\vec{j}-2\vec{k}\right)$, $M_R = 0$,

$2x-5y=4a$, $z=3a$.

1.2. Centre de greutate

1.2.1. Să se determine coordonatele față de sistemul de referință Oxyz din fig.1.2.1.a) ale centrului de greutate pentru un sfert de spiră dintr-o elice cilindrică, confecționat din sârmă, care are ecuațiile parametrice:

$$x = R\cos\theta \ , \quad y = R\sin\theta \ , \quad z = R\theta tg\alpha \ , \quad \theta \in [0, \pi/2] \ ,$$

unde R este raza cilindrului de înfăşurare, iar α este unghiul de pantă al elicei cilindrice.

Rezolvare

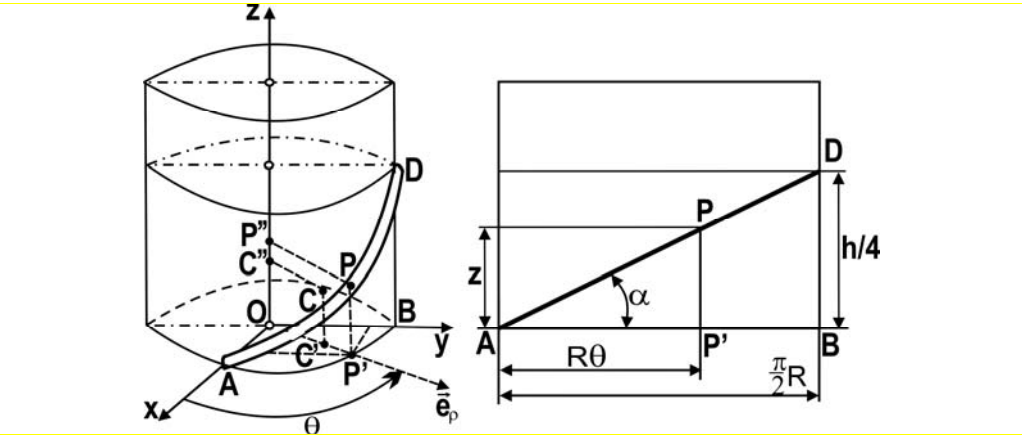


Fig. 1.2.1

Metoda I. În fig. 1.2.1.a este reprezentat arcul de elice cilindrică AD corespunzător unui sfert de spiră, precum şi cilindrul de înfăşurare al elicei cilindrice.

Deoarece lungimea elementară a arcului este:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \frac{R}{\cos\alpha} d\theta \ ,$$

se calculează uşor cu ajutorul integralelor atât lungimea arcului corespunzător unui sfert de spiră:

$$L = \int_0^{\pi/2} ds = \frac{R}{\cos\alpha} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi R}{2\cos\alpha} \ ,$$

cât şi coordonatele centrului său de greutate:

$$x_C = \frac{1}{L}\int_0^{\pi/2} x\,ds = \frac{2\cos\alpha}{\pi R}\frac{R^2}{\cos\alpha}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \frac{2R}{\pi}\ ,$$

$$y_C = \frac{1}{L}\int_0^{\pi/2} y\,ds = \frac{2\cos\alpha}{\pi R}\frac{R^2}{\cos\alpha}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta = \frac{2R}{\pi}\ ,$$

$$z_C = \frac{1}{L}\int_0^{\pi/2} z\,ds = \frac{2\cos\alpha}{\pi R}\frac{R^2 tg\alpha}{\cos\alpha}\int_0^{\pi/2}\theta\,d\theta = \frac{\pi R}{4}tg\alpha\ .$$

Metoda II. Abscisa x_C şi ordonata y_C ale centrului de greutate C al arcului de elice cilindrică AD coincid cu cele ale proiecţiei sale C′ pe planul Oxy, care mai reprezintă şi centrul de greutate al arcului de cerc AB din fig.1.2.1.a), care este un sfert de cerc de rază R. Ca urmare rezultă:

$$OC' = R\frac{\sin\pi/4}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}\ ,$$

$$x_C = y_C = OC'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2R}{\pi}\ .$$

Cota z_C a lui C coincide cu cea a proiecţiei sale C″ pe ax Oz, care este şi proiecţia pe Oz a centrului de greutate al segmentului de dreaptă AD din fig.1.2.1.b, reprezentând desfăşurarea plană a arcului corespunzător de elice cilindrică. Deoarece în această desfăşurare segmentul de dreaptă AB are lungimea arcului de cerc corespunzător, se obţine:

$$BD = AB tg\alpha = \frac{\pi R}{2}tg\alpha\ ,$$

$$z_C = \frac{1}{2}BD = \frac{\pi R}{4}tg\alpha\ .$$

1.2.2. Se consideră o placă spaţială omogenă de forma şi dimensiunile din fig. 1.2.2, raportată la sistemul de referinţă Oxyz. Să se determine:

a) coordonatele x_1 şi y_1 ale centrului de greutate al suprafeţei din planul Oxy a plăcii;

b) volumele V_1 şi V_2 ale corpurilor de rotaţie obţinute prin rotirea completă a suprafeţei din planul Oxy a plăcii în jurul axelor Ox, respectiv Oy;

c) coordonatele centrului de greutate al plăcii.

Rezolvare

a) Luând ca element de suprafață o fâşie paralelă cu axa Oy, de grosime infinitezimală dx, se obține:

$$A_1 = \int_0^{4a}\left(\frac{x^2}{4a} - 2x + 5a\right)dx = \frac{28}{3}a^2 \ ,$$

$$x_1 = \frac{1}{A_1}\int_0^{4a} x\left(\frac{x^2}{4a} - 2x + 5a\right)dx = \frac{10}{7}a \ ,$$

$$y_1 = \frac{1}{2A_1}\int_0^{4a}\left(\frac{x^2}{4a} - 2x + 5a\right)^2 dx = \frac{103}{70}a \ .$$

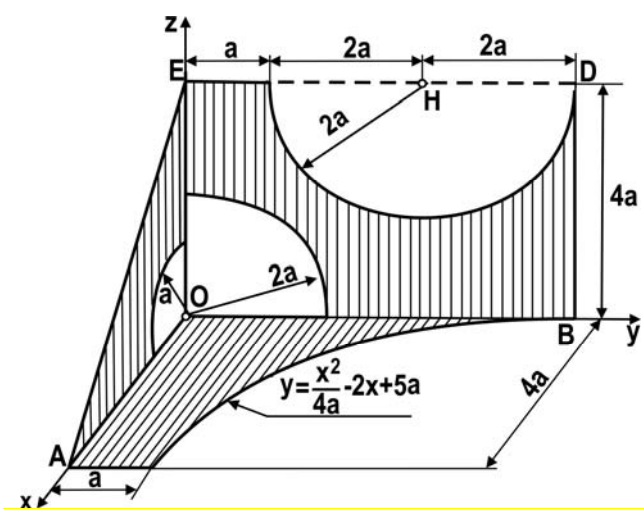


Fig. 1.2.2

b) Pe baza celei de-a doua teoreme a lui Guldin, rezultă:

$$V_1 = 2\pi y_1 A_1 = \frac{412\pi}{15}a^3 \ ,$$

$$V_2 = 2\pi x_1 A_1 = \frac{80\pi}{3}a^3 \ .$$

c) Pentru a folosi formulele de calcul ale coordonatelor centrului de greutate în funcție de cele ale centrelor de greutate parțiale, este necesar să se descompună suprafața plăcii în 6 părți, care se numerotează după cum urmează:

1 - suprafața din planul Oxy ;
2 - suprafața dreptunghiului OBDE ;
3 - suprafața triunghiului OAE ;
4 - suprafața semicercului cu centrul în H, de rază 2a ;
5 - suprafața sfertului de cerc cu centrul în O, de rază 2a ;
6 - suprafața sfertului de cerc cu centrul în O, de rază a .

Pentru efectuarea cu acuratețe a calculelor, este recomandabil să se completeze tabelul urmator.

Nr. crt.	A_i	x_i	y_i	z_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$	$A_i z_i$
1	$\frac{28}{3}a^2$	$\frac{10}{7}a$	$\frac{103}{70}a$	0	$\frac{40}{3}a^3$	$\frac{206}{15}a^3$	0
2	$20a^2$	0	$\frac{5}{2}a$	$2a$	0	$50a^3$	$40a^3$
3	$8a^2$	$\frac{4}{3}a$	0	$\frac{4}{3}a$	$\frac{32}{3}a^3$	0	$\frac{32}{3}a^3$
4	$-2\pi a^2$	0	$3a$	$\frac{12\pi-8}{3\pi}a$	0	$-6\pi a^3$	$\left(-8\pi+\frac{16}{3}\right)a^3$
5	$-\pi a^2$	0	$\frac{8}{3\pi}a$	$\frac{8}{3\pi}a$	0	$-\frac{8}{3}a^3$	$-\frac{8}{3}a^3$
6	$-\frac{\pi}{4}a^2$	$\frac{4}{3\pi}a$	0	$\frac{4}{3\pi}a$	$-\frac{1}{3}a^3$	0	$-\frac{1}{3}a^3$
$\sum$	$\frac{448-39\pi}{12}a^2$	-	-	-	$\frac{71}{3}a^3$	$\frac{916-90\pi}{15}a^3$	$(53-8\pi)a^3$

Din tabel rezultă imediat:

$$A=\sum_{i=1}^{6}A_i=\frac{448-39\pi}{12}a^2=27{,}123a^2\ ,$$

$$x_C=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{6}A_i x_i=\frac{284a}{448-39\pi}=0{,}87a\ ,$$

$$y_C=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{6}A_i y_i=\frac{4a}{5}\frac{916-90\pi}{448-39\pi}=1{,}56a\ ,$$

$$z_C=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{6}A_i z_i=\frac{12a(53-8\pi)}{448-39\pi}=1{,}03a\ .$$

1.2.3. Se consideră corpul omogen de rotație, având greutatea $\vec{G}$, reprezentat în fig. 1.2.3 în semisecțiune mediană cu planul vertical Oyz. Volumul său se obține prin rotirea completă a suprafeței plane haşurate în jurul axei Oz. Pe lângă greutatea sa, asupra corpului mai acționează ca în figură 4 forțe concentrate, având valorile: $F_1=F_2=\sqrt{10}\,G/2$, $F_3=G$, $F_4=\lambda G$. Să se determine:

a) înălțimea h a cilindrului gol, având semisecțiunea mediană OBDE, astfel încât centrul său de greutate să coincidă cu centrul de greutate al corpului;

b) distanța d de la centrul de greutate al suprafeței haşurate la axa Oz;

c) valoarea parametrului λ pentru ca axa centrală a sistemului de forțe ce acționează asupra corpului să treacă prin O.

Răspunsuri

a) $h = 1{,}2r$;

b) $d = \dfrac{91r}{3(5\pi + 24)} = 0{,}764r$;

c) $\lambda = 2$.

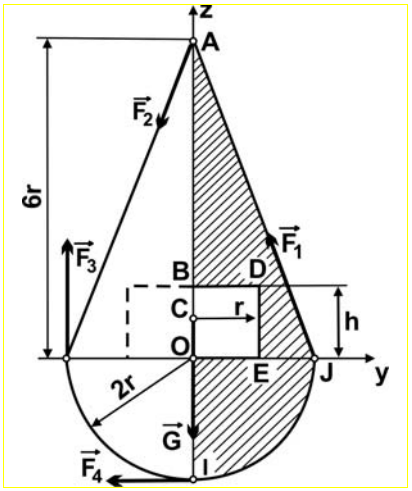


Fig. 1.2.3

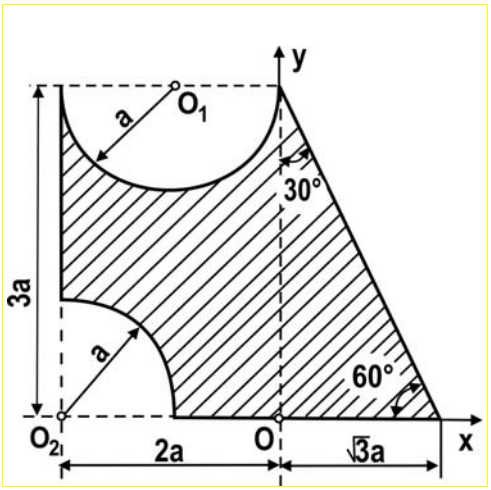


Fig. 1.2.4

1.2.4 – 12. Pentru fiecare placă plană omogenă, având forma şi dimensiunile dintr-una din fig. 1.2.4 – 12, să se determine coordonatele centrului de greutate față de sistemul de referință Oxy din figură.

Răspunsuri

1.2.4.

$$x_C = -\frac{2a}{9}\frac{29 - 6\pi}{8 + 2\sqrt{3} - \pi} = -0{,}27a \ ,$$

$$y_C = -\frac{2a}{9}\frac{56 - 9\left(\pi - \sqrt{3}\right)}{8 + 2\sqrt{3} - \pi} = 1{,}156a \ .$$

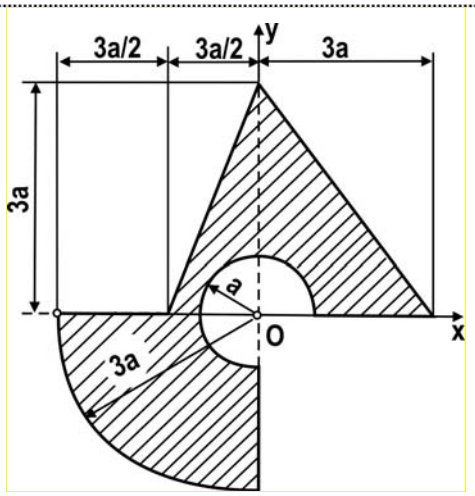


Fig. 1.2.5

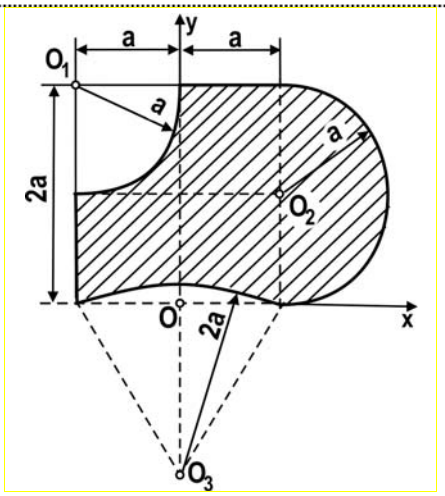


Fig. 1.2.6

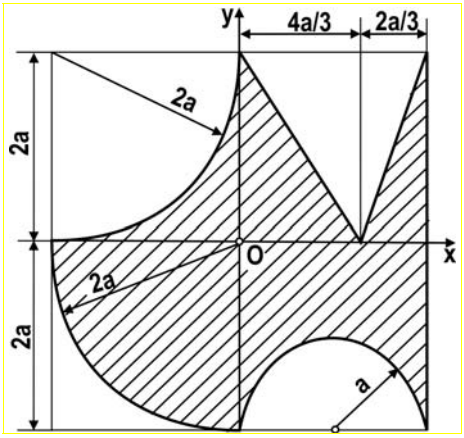


Fig. 1.2.7

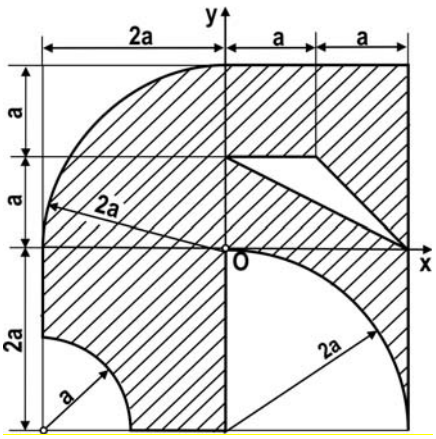


Fig. 1.2.8

1.2.5. $x_C = -\dfrac{a}{18}\dfrac{127}{9+2\pi} = -0{,}46a$, $y_C = -\dfrac{a}{9}\dfrac{31}{9+2\pi} = -0{,}225a$.

1.2.6. $x_C = \dfrac{(9\pi+4)a}{48+12\sqrt{3}-5\pi} = 0{,}6a$, $y_C = \dfrac{8(\sqrt{3}\pi+1)a}{48+12\sqrt{3}-5\pi} = 0{,}12a$.

1.2.7. $x_C = \dfrac{(27\pi-64)a}{9(20-\pi)} = 0{,}137a$, $y_C = -\dfrac{2a}{3}\dfrac{3\pi-2}{20-2\pi} = -0{,}29a$.

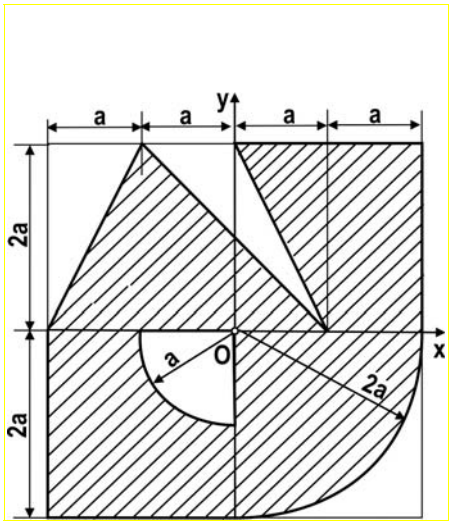


Fig. 1.2.9

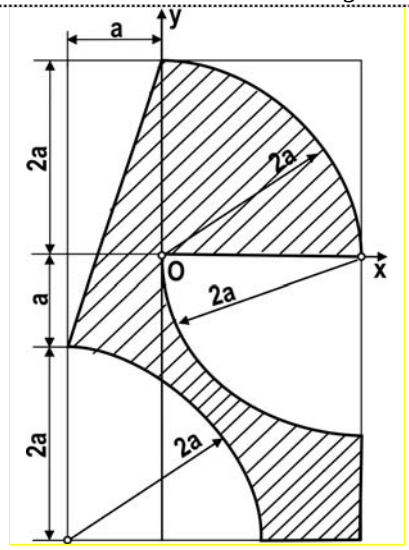


Fig. 1.2.10

1.2.8. $x_C = -\dfrac{2a}{3}\dfrac{13-3\pi}{46-\pi} = -0{,}056a$, $y_C = \dfrac{2a}{3}\dfrac{15\pi-28}{46-\pi} = 0{,}297a$.

1.2.9. $x_C = \dfrac{28a}{9(12+\pi)} = 0{,}2a$, $y_C = -\dfrac{4a}{3(12+\pi)} = -0{,}088a$.

1.2.10. $x_C = \dfrac{a}{3}\dfrac{43-6\pi}{19-2\pi} = 0{,}633a$, $y_C = -\dfrac{2a}{3}\dfrac{31-9\pi}{19-2\pi} = -0{,}143a$.

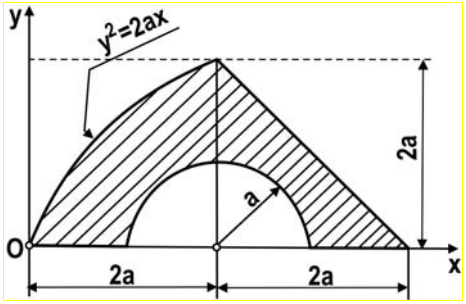


Fig. 1.2.11

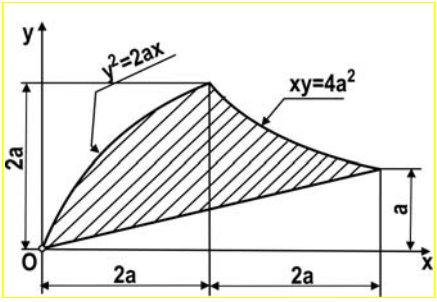


Fig. 1.2.12

1.2.11. $x_C = \dfrac{2a}{5}\dfrac{128-15\pi}{28-3\pi} = 1{,}74a$, $y_C = \dfrac{16a}{28-3\pi} = 0{,}86a$.

1.2.12. $x_C = \dfrac{44a}{5(1+6\ln 2)} = 1{,}7a$, $y_C = \dfrac{5a}{1+6\ln 2} = 0{,}97a$.

1.2.13. Se consideră un arc de parabolă omogen, raportat la sistemul de referință plan Oxy, având ecuația $y = x^2/2a$, pentru $0 \le x \le 2a$.

a) Să se determine coordonatele centrului său de greutate.

b) Să se calculeze ariile laterale ale corpurilor de rotație obținute prin rotirea completă a arcului de parabolă considerat în jurul axelor Ox, respectiv Oy.

Răspunsuri

a) $x_C = \dfrac{a}{3}\dfrac{11\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} = 1{,}27a$, $y_C = \dfrac{a}{8}\dfrac{18\sqrt{5}-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} = 0{,}82a$.

b) $A_1 = 2\pi L y_C = \pi a^2 \dfrac{18\sqrt{5}-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{8} = 15{,}24a^2$,

$A_2 = 2\pi L x_C = \pi a^2 \dfrac{11\sqrt{5}-2}{3} = 23{,}66a^2$.

1.2.14. O linie plană omogenă, confecționată din sârmă, raportată la sistemul de referință Oxy, este constituită din arcul de parabolă de ecuație $y^2 = 2ax$ pentru $0 \le x \le 2a$ și din segmentul de dreaptă de ecuație $x + y = 4a$ pentru $2a \le x \le 4a$.

a) Să se determine coordonatele centrului său de greutate.

b) Să se calculeze aria corpului de rotație obținut prin rotirea completă a liniei în jurul axei Ox.

Răspunsuri

a) $x_C = \dfrac{a}{8}\dfrac{96\sqrt{2}+18\sqrt{5}-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{4\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} = 1{,}886a$,

$$y_C = \frac{a}{3}\frac{12\sqrt{2}+11\sqrt{5}-2}{4\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} = 1{,}14a \ .$$

b) $A = 2\pi L y_C = \pi a^2 \frac{12\sqrt{2}+11\sqrt{5}-2}{3} = 41{,}435a^2 \ .$

1.2.15. O placă plană omogenă, raportată la sistemul de referință Oxy, are suprafața sa cuprinsă între parabolele de ecuații $y = x^2/a - 3x + 2a$ şi $y = -x^2/a - 7x - 10a$.

a) Să se determine coordonatele centrului său de greutate.

b) Să se calculeze volumele V_1 şi V_2 ale corpurilor de rotație obținute prin rotirea completă a suprafeței sale în jurul axelor Ox, respectiv Oy.

Răspunsuri

a) $x_C = 2{,}5a \ , \quad y_C = 0{,}2a \ .$

b) $V_1 = \frac{2\pi}{15}a^3 \ , \quad V_2 = \frac{5\pi}{3}a^3 \ .$

1.2.16. O placă plană omogenă, raportată la sistemul de referință Oxy, are suprafața sa cuprinsă între axele de coordonate şi arcul din primul cadran al elipsei de ecuație $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, corespunzătoare unui sfert de elipsă.

a) Să se determine coordonatele centrului său de greutate.

b) Să se calculeze volumele V_1 şi V_2 ale corpurilor de rotație obținute prin rotirea completă a suprafeței sale în jurul axelor Ox, respectiv Oy.

Răspunsuri

a) $x_C = \frac{4a}{3\pi} \ , \quad y_C = \frac{4b}{3\pi} \ .$

b) $V_1 = \frac{2\pi a b^2}{3} \ , \quad V_2 = \frac{2\pi a^2 b}{3} \ .$

1.2.17. Să se determine aria totală şi volumul unui tor semicircular, obținut prin rotirea completă a unui semicerc de rază r în jurul unei axe din planul său, care este paralelă cu diametrul său la distanța $a = 4r/\pi$.

Răspunsuri

$$A = 4(3\pi + 4)r^2 , \quad V = \frac{16\pi}{3} r^3 = 16{,}755 r^3 .$$

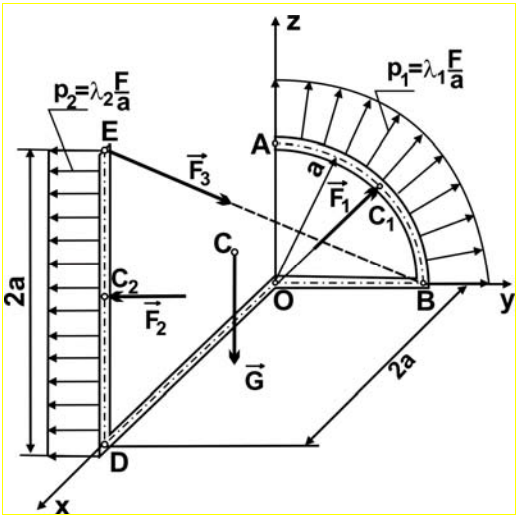


Fig. 1.2.18

1.2.18. Asupra cadrului spațial din fig. 1.2.18, constituit dintr-o bară omogenă îndoită ca în figură, raportat la sistemul de referință Oxyz cu axa Oz verticală, acționează, pe lângă greutatea proprie de valoare $G = \lambda F$, două subsisteme de forțe uniform distribuite pe lungimile arcului de cerc AB şi a segmentului de dreaptă DE, precum şi forța concentrată $\vec{F}_3$ de valoare 3F, aplicată în E după direcția dreptei EB. Cunoscând $\lambda = (10 + \pi)/3 = 4{,}38$, $\lambda_1 = 6{,}38$ şi $\lambda_2 = 3{,}69$, să se determine:

a) coordonatele centrului de greutate C al cadrului;

b) rezultantele celor două subsisteme de forțe distribuite şi coordonatele punctelor lor de aplicație;

c) elementele torsorului de reducere în O, momentul minimal şi axa centrală pentru întregul sistem de forțe ce acționează asupra cadrului.

Răspunsuri

a) $x_C = \frac{4a}{\lambda} = 0{,}9a , \quad y_C = \frac{a}{\lambda} = 0{,}228a , \quad z_C = \frac{2a}{\lambda} = 0{,}456a ;$

b) $\vec{F}_1 = 6{,}38F(\vec{j} + \vec{k}) , \quad C_1\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) ,$

$\vec{F}_2 = -7{,}38F\vec{j}$, $C_2(2a, 0, a)$;

c) $\vec{R} = -2F\vec{i}$, $\vec{M}_O = Fa\left(4{,}38\vec{i} + 4\vec{j} - 12{,}76\vec{k}\right)$, $\vec{M}_R = 4{,}38Fa\vec{i}$,
$y = -6{,}38a$, $z = -2a$.

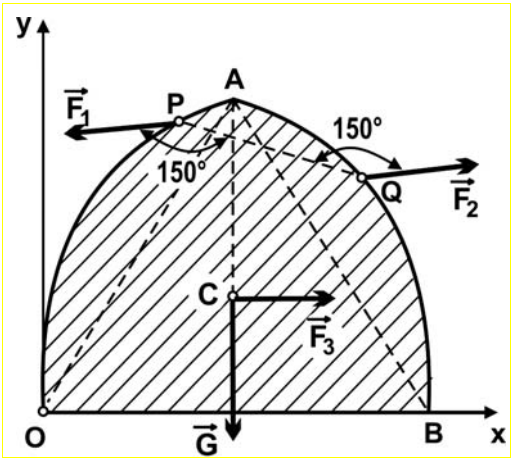


Fig. 1.2.19

1.2.19. Se consideră placa plană omogenă din fig. 1.2.19, cu greutatea de valoare G, raportată la sistemul de referință Oxy cu axa Oy verticală. Suprafața plăcii este delimitată de arcele de cerc OA şi AB, având centrele în B, respectiv în O, precum şi de segmentul de dreaptă OB. Pe lângă greutatea proprie, asupra plăcii mai acționează 3 forțe concentrate în planul său, aplicate ca în figură în punctele P, Q şi în centrul de greutate C al plăcii. Cunoscând $OA = OB = AB = 2\ell$, $PQ = \ell$, $F_1 = F_2 = F_3 = G$, să se determine:

a) coordonatele centrului de greutate C al plăcii;

b) elementele torsorului de reducere în O şi ecuația axei centrale pentru sistemul de forțe aplicat plăcii.

Răspunsuri

a) $x_C = \ell$, $y_C = \dfrac{5\ell}{4\pi - 3\sqrt{3}} = 0{,}678\ell$;

b) $\vec{R} = G\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$, $\vec{M}_O = -1{,}178G\ell\vec{k}$, $x + y = 1{,}178\ell$.

1.3. Echilibrul punctului material

1.3.1. Un punct material de greutate G se află pe suprafaţa unui cilindru parabolic cu generatoarea orizontală, având ecuaţia $z = y^2/2a$ faţă de sistemul de referinţă Oxyz cu axa Oz verticală, orientată în sens ascendent. Dacă se cunoaşte coeficientul de frecare μ dintre punctul material şi legătură , să se determine:

a) poziţiile de echilibru ale punctului material pe legătură;

b) reacţiunile legăturii asupra punctului material în poziţiile sale de echilibru la limită.

Rezolvare

Metoda I. a) Faţă de sistemul de referinţă considerat se exprimă uşor analitic atât ecuaţia legăturii sub forma $f(x, y, z) = 0$, cât şi rezultanta forţelor direct aplicate, care este greutatea punctului material. Din datele problemei rezultă:

$$z - \frac{y^2}{2a} = 0 \ ,$$

$$\vec{R}^{\,d} = -G\vec{k} \ ,$$

astfel încât, pe baza condiţiei de echilibru:

$$\frac{\left| X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \ ,$$

precum şi a ecuaţiei legăturii, se obţine:

$$\frac{Ga}{G\sqrt{y^2 + a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \ , \qquad 0 \leq z \leq \frac{\mu^2 a}{2} \ .$$

b) Notând cu T_x, T_y, T_z proiecţiile pe axele de coordonate ale forţei de frecare, care sunt necunoscute, se obţin condiţiile de echilibru la limită:

$$T_x = 0\ ,\quad T_y - \lambda\frac{y}{a} = 0\ ,\quad T_z + \lambda - G = 0\ ,\quad -\frac{y}{a}T_y + T_z = 0\ ,$$

$$\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} = \frac{\mu\lambda}{a}\sqrt{y^2 + a^2}\ ,$$

din care, ținând seama şi de ecuația legăturii, rezultă:

$$|y| = \mu a\ ,\quad z = \frac{\mu^2 a}{2}\ ,\quad \lambda = \frac{Ga^2}{y^2 + a^2} = \frac{G}{1+\mu^2}\ ,$$

$$N_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0\ ,\quad N_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \mp\frac{\mu G}{1+\mu^2}\ ,\quad N_z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{G}{1+\mu^2}\ ,$$

$$T_y = \frac{Gay}{y^2 + a^2} = \pm\frac{\mu G}{1+\mu^2}\ ,\quad T_z = \frac{Gy^2}{y^2 + a^2} = \frac{\mu^2 G}{1+\mu^2}\ ,\quad N = \frac{G}{\sqrt{1+\mu^2}}\ ,\ F_f = \frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}\ .$$

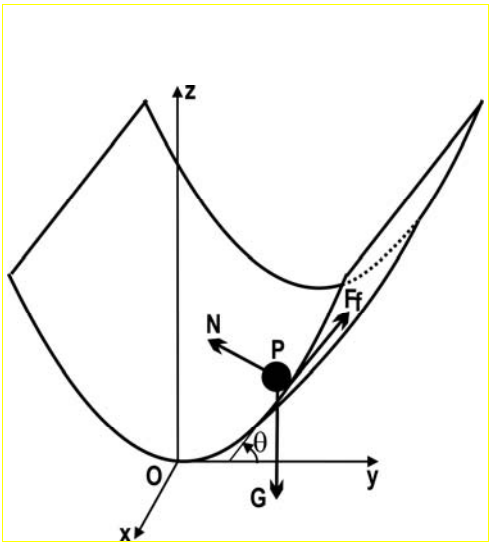


Fig. 1.3.1

Metoda II. Se observă că proiecțiile pe axa Ox ale forțelor ce acționează asupra punctului material sunt nule, astfel încât se poate studia echilibrul său numai în planul vertical Oyz. Condițiile de echilibru ale punctului material aflat în orice poziție $P(x, y, z)$ pe legătură se vor exprima la fel ca şi în cazul când $x = 0$. Condițiile de echilibru ale punctului material în planul Oyz, ținând seama de fig. 1.3.1, devin:

$$-N\sin\theta + F_f\cos\theta = 0\ ,$$

$$N\cos\theta + F_f\sin\theta - G = 0\ ,$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dz}{dy} = \frac{y}{a}\ ,\quad z = \frac{y^2}{2a}\ ,$$

$$F_f \le \mu N\ ,$$

astfel încât rezultă:

a) $F_f = N|\operatorname{tg}\theta| = N\dfrac{|y|}{a}\ ,\quad |y| \le \mu a\ ,\quad 0 \le z \le \dfrac{\mu^2 a}{2}\ ;$

b) $|\operatorname{tg}\theta| = \mu\ ,\quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\ ,\quad N = \dfrac{G}{\cos\theta\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)} = \dfrac{G}{\sqrt{1+\mu^2}}\ ,\quad F_f = \dfrac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}$

.

Se observă că această metodă conduce mai rapid la aceleaşi rezultate.

1.3.2. Pe o circumferință din sârmă, situată într-un plan vertical, se află două inele A şi B, fiecare de greutate G, legate între ele printr-un fir inextensibil de greutate neglijabilă. Cunoscând unghiul la centru 2α corespunzător firului întins şi coeficientul de frecare $\mu = tg\varphi$ dintre inele şi circumferință, să se determine:

a) valorile unghiului θ dintre verticală şi dreapta ce uneşte centrul O al cercului cu mijlocul D al firului întins, pentru echilibrul inelelor pe circumferință;

b) reacțiunile circumferinței asupra inelelor şi efortul din fir în cazul echilibrului la limită al inelelor, dacă $\alpha = \pi/4$ şi $0 < \varphi < \pi/4$.

Rezolvare

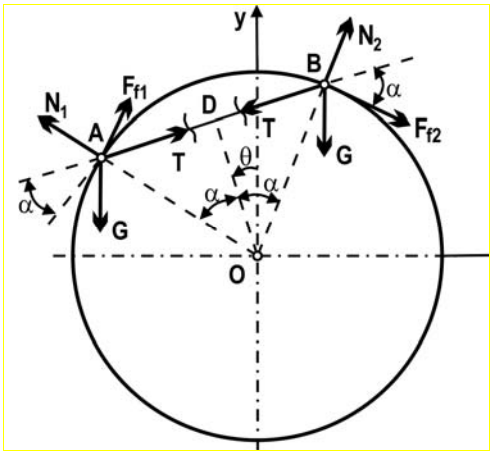


Fig. 1.3.2

a) În fig. 1.3.2 s-au reprezentat forțele ce acționează asupra inelelor în poziția lor de echilibru la limită, când tendința de mişcare a sistemului format de ele este în sensul de coborâre al inelului A pe cerc. Din condițiile de echilibru la limită pentru acest caz se va determina valoarea maximă a unghiului θ, iar valoarea sa minimă rezultă luând în considerare tendința de mişcare în sens contrar, astfel încât pentru echilibrul inelelor este necesar ca θ să ia valori cuprinse între θ_{max} şi θ_{min}. Ținând seama de fig. 1.3.2, ecuațiile de proiecții ale forțelor ce acționează asupra fiecărui inel pe tangentele la cerc şi pe normalele corespunzătoare sunt:

$$G\sin(\alpha+\theta) - N_1 tg\varphi - S\cos\alpha = 0 \ , \qquad N_1 - S\sin\alpha - G\cos(\alpha+\theta) = 0 \ ,$$
$$S\cos\alpha - N_2 tg\varphi - G\sin(\alpha-\theta) = 0 \ , \qquad N_2 - S\sin\alpha - G\cos(\alpha-\theta) = 0 \ ,$$

din care se determină:

$$N_1 = S\sin\alpha + G\cos(\alpha+\theta) = 0 \ , \qquad N_2 = S\sin\alpha + G\cos(\alpha-\theta) = 0 \ ,$$

$$S = G\frac{\sin(\alpha-\varphi+\theta)}{\cos(\alpha-\varphi)} = G\frac{\sin(\alpha+\varphi-\theta)}{\cos(\alpha+\varphi)} \ , \qquad tg\theta_{max} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\alpha + \cos 2\varphi} \ .$$

Pentru tendința de mişcare în sens contrar a sistemului format de cele două inele se obțin aceleaşi ecuații de echilibru la limită, dar proiecțiile forțelor de frecare pe

tangentele corespunzătoare vor avea semne contrare față de cazul precedent. De aici rezultă imediat $\theta_{min} = -\theta_{max}$.

b) Pentru $\alpha = \pi/4$ se obțin următoarele rezultate:

$$\theta_{max} = 2\varphi \ , \qquad S = G \ ,$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} G\left(1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right) \ , \qquad N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} G\left(1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi\right) \ ,$$

$$\theta_{min} = -2\varphi \ , \qquad S = G \ ,$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} G\left(1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi\right) \ , \qquad N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} G\left(1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right) \ ,$$

iar forțele de frecare au valorile maxime μN_1, respectiv μN_2.

1.3.3. În absența câmpului gravitațional, un punct material este atras de vârfurile unui paralelipiped dreptunghic, având muchiile de lungimi a, b şi c, cu forțe proporționale cu distanțele de la punctul material la aceste vârfuri, factorul de proporționalitate fiind $\lambda > 0$.

a) Să se determine rezultanta sistemului de forțe ce acționează asupra punctului material în funcție de coordonatele sale față de sistemul de referință Oxyz, având originea în unul din vârfurile paralelipipedului şi axele de coordonate orientate după muchiile corespunzătoare.

b) Să se afle poziția de echilibru a punctului material.

c) Să se studieze echilibrul punctului material în cazul în care forțele ce acționează asupra lui din partea vârfurilor paralelipipedului nu mai sunt de atracție, ci de respingere.

Răspunsuri

a) $\vec{R} = 8\lambda\left(\frac{a}{2} - x\right)\vec{i} + 8\lambda\left(\frac{b}{2} - y\right)\vec{j} + 8\lambda\left(\frac{c}{2} - z\right)\vec{k} = 8\lambda\overline{PM}$,

$P(x,y,z)$, $\quad M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

b) $x = \frac{a}{2}$, $\quad y = \frac{b}{2}$, $\quad z = \frac{c}{2}$.

c) $\vec{R}' = -8\lambda\overline{PM}$.

1.3.4. Pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală se află un corp B de greutate P, legat ca în fig. 1.3.4 printr-un fir ideal de punctul cel mai de sus A al planului înclinat şi printr-un alt fir ideal de un corp de greutate Q, porțiunea până la scripetele mic din figură a acestui fir fiind orizontală.

a) Să se determine reacțiunea planului înclinat asupra corpului B şi efortul din firul AB.

b) Pentru ce valori ale greutății Q, corpul B se desprinde de planul înclinat?

Răspunsuri

a) $N = P\cos\alpha - Q\sin\alpha$, $T = P\sin\alpha + Q\cos\alpha$.

b) $Q > P\,\mathrm{ctg}\alpha$.

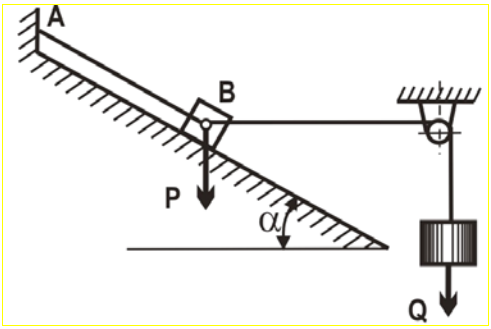


Fig. 1.3.4

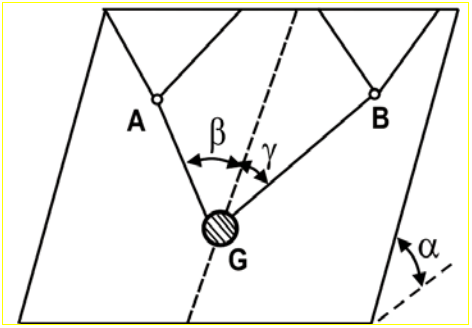


Fig. 1.3.5

1.3.5. Un corp de greutate G se află în echilibru pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, fiind ținut în poziția din fig. 1.3.5 prin două fire ideale, paralele cu planul înclinat, care formează unghiurile β şi γ cu linia de cea mai mare pantă a planului.

a) Să se determine reacțiunea planului înclinat asupra corpului şi eforturile din fire.

b) Pentru ce valori ale coeficientului de frecare μ dintre planul înclinat şi corp, acesta este menținut în echilibru pe plan şi în cazul în care firele sunt tăiate?

Răspunsuri

a) $N = G\cos\alpha$, $T_A = \dfrac{G\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$, $T_B = \dfrac{G\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$.

b) $\mu \geq \mathrm{tg}\alpha$.

1.3.6. Un inel de greutate G se poate mişca fără frecare pe un cerc din sârmă situat într-un plan vertical. De inel este legat un fir inextensibil şi de greutate neglijabilă, care este trecut peste un scripete mic situat în punctul A cel mai de sus al cercului şi are legat la celălalt capăt un corp de greutate Q (vezi fig. 1.3.6).

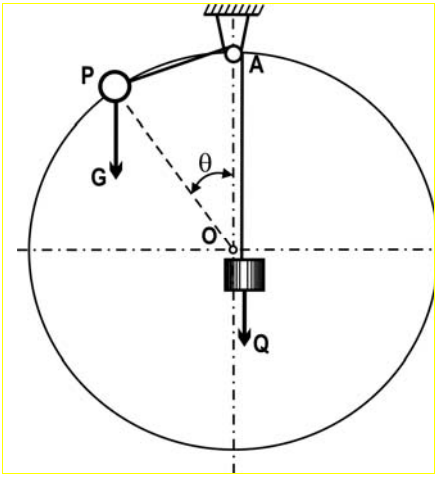


Fig. 1.3.6

Să se determine poziţiile de echilibru ale inelului şi reacţiunea legăturii asupra sa pentru fiecare din poziţiile de echilibru determinate. Pentru ce valori ale greutăţii Q există aceste poziţii de echilibru ale inelului?

Răspunsuri

$\theta_1 = \pm\pi$, $N_1 = Q - G$, $Q \geq 0$;

$\theta_2 = \pm 2\arcsin\dfrac{Q}{2G}$, $N_2 = G$, $Q < 2G$.

1.3.7. O bilă mică de greutate P se sprijină fără frecare pe o suprafaţă semisferică, la care planul diametral, ce conţine şi diametrul AB, este orizontal. De bilă este legat un fir ideal, care trece peste un scripete mic fixat în A şi are la celălalt capăt un corp de greutate Q (vezi fig. 1.3.7).

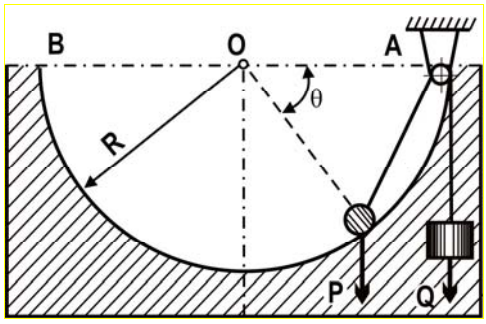


Fig. 1.3.7

Să se determine poziţia de echilibru a bilei, relaţia dintre P şi Q pentru existenţa echilibrului, precum şi reacţiunea legăturii asupra bilei în poziţia sa de echilibru.

Răspunsuri

$$\theta = 2\arccos\frac{Q+\sqrt{Q^2+8P^2}}{4P} \quad , \quad P \geq Q \ ,$$

$$N = \frac{\sqrt{Q^2+8P^2}-Q}{8P}\sqrt{8P^2-2Q\left(Q+\sqrt{Q^2+8P^2}\right)} \ .$$

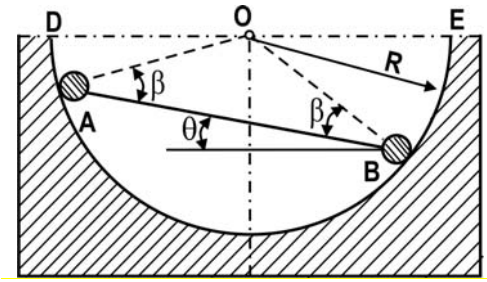


Fig. 1.3.8

1.3.8. Două bile mici A şi B, având greutăţile G_1, respectiv $G_2 > G_1$, legate între ele printr-o tijă rigidă de greutate neglijabilă şi de lungime 2ℓ, se află în echilibru fără frecare în interiorul unei semisfere de rază $R > \ell$, aşa cum este reprezentat în fig. 1.3.8 în secţiunea cu planul vertical median, unde diametrul DE este orizontal.

Să se determine valoarea unghiului θ dintre tijă şi orizontală la echilibru, reacţiunile suprafeţei asupra bilelor, precum şi efortul din tijă în poziţia de echilibru.

Caz particular: $G_2 = 2G_1$ şi $R = 2\ell/\sqrt{3}$.

Răspunsuri

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2}\frac{\ell}{\sqrt{R^2 - \ell^2}}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \qquad T = \frac{2\ell G_1 G_2}{\sqrt{R^2(G_1+G_2)^2 - 4\ell^2 G_1 G_2}},$$

$$N_A = \frac{RG_1(G_1+G_2)}{\sqrt{R^2(G_1+G_2)^2 - 4\ell^2 G_1 G_2}}, \qquad N_B = \frac{RG_2(G_1+G_2)}{\sqrt{R^2(G_1+G_2)^2 - 4\ell^2 G_1 G_2}}$$

Caz particular: $\theta = \beta = \frac{\pi}{6}$, $T = 2G_1$, $N_A = \sqrt{3}G_1$, $N_B = 2\sqrt{3}G_1$.

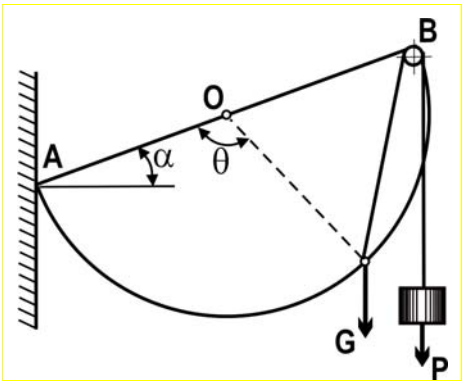


Fig. 1.3.9

1.3.9. Un semicerc din sârmă, situat într-un plan vertical, este fixat ca în fig. 1.3.9 de un perete la capătul A al diametrului său AB, care formează unghiul $\alpha \le \pi/3$ cu orizontala. Pe semicerc se află un inel de greutate G, de care este legat un fir ideal ce trece peste un scripete mic fixat în B şi are la celălalt capăt un corp de greutate P.

a) Dacă frecarea dintre inel şi semicerc este neglijabilă şi $P = G$, să se determine poziţiile de echilibru ale inelului şi reacţiunea legăturii asupra sa în aceste poziţii.

b) Dacă frecarea dintre inel şi semicerc este caracterizată de unghiul de frecare φ dat, să se determine valorile greutăţii P pentru care inelul rămâne în echilibru pe semicerc în poziţia sa în care $\theta = 2\alpha$. Pentru ce valori ale unghiurilor α şi φ această poziţie de echilibru este posibilă?

c) Pentru $\alpha = 0$, $\varphi = \pi/8$ şi $P = G$, să se afle poziţiile de echilibru ale inelului pe semicerc.

Răspunsuri

a) $\theta_1 = \pi - 2\alpha$, $N_1 = 0$, $\theta_2 = \pi - \frac{2\alpha}{3}$, $N_2 = -2G\sin\frac{\alpha}{3}$.

b) $P \le -G\frac{\cos(3\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}$, $\varphi \ge \frac{\pi}{2} - 3\alpha$, $\alpha \le \frac{\pi}{3}$.

c) $2\mathrm{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right) \le \theta \le \pi$.

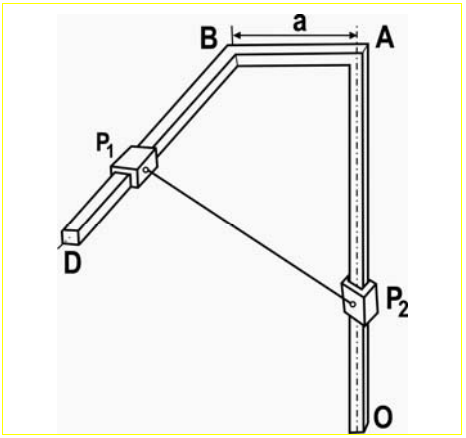


Fig. 1.3.10

1.3.10. Pe bara fixă OABD din fig. 1.3.10, îndoită în unghi drept în A şi B într-un plan vertical, respectiv într-un plan orizontal, având latura OA verticală, se află culisoarele P_1 şi P_2 de aceeaşi greutate G, legate între ele printr-un fir inextensibil de lungime $l = 2AB = 2a$. Cunoscând coeficientul de frecare $\mu = \sqrt{3}/2$ dintre bară şi culisoare, să se determine valorile posibile ale distanţei $d = P_1B$ pentru echilibrul culisoarelor pe bară, precum şi reacţiunile legăturilor la care sunt supuse cele două culisoare în cazul echilibrului lor la limită.

Răspunsuri

$0 \le d \le \sqrt{3}a$, $T = N_1 = N_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}G$, $F_{f1} = F_{f2} = G$.

1.3.11 – 17. Un inel de greutate G este supus la legătura pe un arc de curbă plană aspră, confecționat din sârmă, având ecuația:

1.3.11. $y = a \sin\frac{x}{a}$, $0 \le x \le 2\pi a$

1.3.12. $y = a \cos\frac{x}{a}$, $-\frac{\pi}{2}a \le x \le \frac{\pi}{2}a$

1.3.13. $y = \frac{x^2}{a} - 3x$, $0 \le x \le 3a$

1.3.14. $y = \frac{2}{a}x^2$, $-a \le x \le a$

1.3.15. $y = a\left(1 - e^{\frac{x}{a}}\right)$, $x \in \left(-\infty, a\right]$

1.3.16. $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $-2a \le x \le 2a$

1.3.17. $y = \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^2}{2a} - 2x$, $-3a \le x \le 4a$

față de planul vertical Oxy cu axa Oy verticală, orientată în sensul pozitiv ascendent. Cunoscând coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0{,}5$ dintre inel şi curbă, să se determine pozițiile de echilibru ale inelului pe legătură, precum şi reacțiunile legăturii asupra sa în pozițiile sale de echilibru la limită.

Răspunsuri

1.3.11. $\frac{x}{a} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, $N = \frac{2\sqrt{5}}{5}G$, $F_f = \frac{\sqrt{5}}{5}G$.

1.3.12. $\frac{x}{a} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, $N = \frac{2\sqrt{5}}{5}G$, $F_f = \frac{\sqrt{5}}{5}G$.

1.3.13. $\frac{x}{a} \in \left[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right]$, $N = \frac{2\sqrt{5}}{5}G$, $F_f = \frac{\sqrt{5}}{5}G$.

1.3.14. $\frac{x}{a} \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$, $N = \frac{2\sqrt{5}}{5}G$, $F_f = \frac{\sqrt{5}}{5}G$.

1.3.15. $\frac{x}{a} \le -\ln 2$, $N = \frac{2\sqrt{5}}{5}G$, $F_f = \frac{\sqrt{5}}{5}G$.

1.3.16. $\dfrac{y}{a} \in \left[-1\,,\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\,1\right]$, $N = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}G$, $F_f = \dfrac{\sqrt{5}}{5}G$.

1.3.17. $\dfrac{x}{a} \in \left[-\dfrac{\sqrt{11}-1}{2}\,,\,-\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}\,,\,\dfrac{\sqrt{11}+1}{2}\right]$,

$N = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}G$, $F_f = \dfrac{\sqrt{5}}{5}G$.

1.3.18. Un punct material de greutate G este supus la legătura bilaterală pe suprafața unui elipsoid cu ecuația:

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

față de sistemul de referință Oxyz, având axa Oz verticală. Cunoscând unghiul de frecare $\varphi = \pi/4$ dintre punctul material şi legătură, să se determine:

a) pozițiile de echilibru ale punctului material pe legătură şi reacțiunile suprafeței asupra sa în pozițiile sale de echilibru la limită;

b) pozițiile de echilibru în cazul în care legătura punctului material pe suprafața elipsoidului este unilaterală;

c) reacțiunile suprafeței asupra punctului material în pozițiile sale în care $z = a/2$. Să se arate că în aceste poziții punctul material se află în echilibru.

Răspunsuri

a) $\dfrac{z}{a} \in \left[-1\,,\,-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{5}}{5}\,,\,1\right]$, $N = F_f = \dfrac{\sqrt{2}}{2}G$;

b) $\dfrac{z}{a} \in \left[\dfrac{\sqrt{5}}{5}\,,\,1\right]$ sau $\dfrac{z}{a} \in \left[-1\,,\,-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right]$;

c) $N = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}G$, $F_f = \dfrac{\sqrt{21}}{7}G$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \varphi$.

1.3.19. În punctele A, B şi C ale unui tavan orizontal, care formează un triunghi echilateral cu laturile de lungime a, sunt legate 3 arcuri elicoidale identice, având constanta elastică k fiecare. Celelalte capete ale arcurilor sunt legate de un corp punctiform P de greutate G. Ştiind că în poziția de echilibru a corpului figura geometrică PABC este un tetraedru regulat, să se determine lungimea arcurilor în stare nedeformată.

Răspuns

$l_0 = a - \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{G}{k}$.

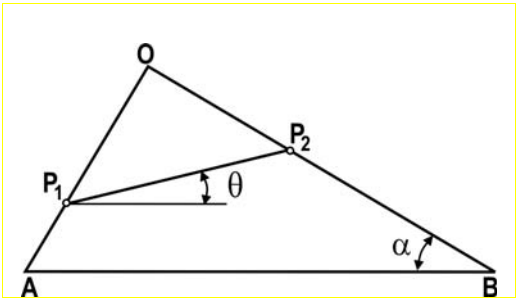


Fig. 1.3.20

1.3.20. Pe catetele OA şi OB ale unui triunghi dreptunghic, confecţionat din sârmă, situat într-un plan vertical, având ipotenuza AB orizontală şi unghiul $\alpha \le \pi/4$ dat, se află inelele P_1 şi P_2, de greutăţi G_1, respectiv G_2, legate între ele printr-un fir inextensibil de greutate neglijabilă (vezi fig. 1.3.20).

a) Dacă frecarea dintre inele şi legături este neglijabilă, să se determine valoarea unghiului θ dintre fir şi orizontală, precum şi reacţiunile legăturilor asupra inelelor, în poziţia lor de echilibru. Care trebuie să fie raportul G_2/G_1 pentru ca, în poziţia de echilibru a inelelor, firul să fie orizontal? Care este valoarea unghiului θ pentru $G_1 = G_2$?

b) Dacă frecarea dintre inele şi legături este caracterizată de unghiul de frecare $\varphi < \alpha$, acelaşi pentru ambele inele, să se afle valorile unghiului θ pentru echilibrul lor.

c) Pentru cazul particular în care $G_1 = G_2 = G$, $\alpha \le \pi/4$ şi $\varphi = \pi/12$, să se determine poziţiile de echilibru ale inelelor şi valoarea efortului din fir în poziţiile lor de echilibru la limită.

Răspunsuri

a) $\theta = \operatorname{arctg}\frac{G_1 \cos\alpha}{G_2 \sin\alpha} - \alpha$, $T = \sqrt{G_1^2 \cos^2\alpha + G_2^2 \sin^2\alpha}$,

$N_1 = (G_1 + G_2)\sin\alpha$, $N_2 = (G_1 + G_2)\cos\alpha$; $\frac{G_2}{G_1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} \ge 1$;

$\theta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha \ge 0$.

b) $\operatorname{arctg}\dfrac{G_1\cos(\alpha+\varphi)}{G_2\sin(\alpha+\varphi)}-(\alpha+\varphi)\le\theta\le\varphi-\alpha+\operatorname{arctg}\dfrac{G_1\cos(\alpha-\varphi)}{G_2\sin(\alpha-\varphi)}$.

c) $-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}$, $T=\dfrac{1}{2}G$.

1.4. Echilibrul corpului rigid

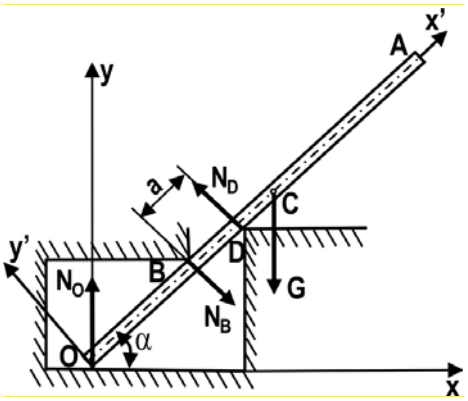


Fig. 1.4.1

1.4.1. O bară omogenă de greutate G şi lungime 2ℓ se află în echilibru într-un plan vertical, în poziția în care unghiul format cu planul orizontal este α, fiind simplu rezemată în punctele sale O, B şi D ca în fig. 1.4.1. Cunoscând distanța $BD=a<\ell$, să se determine reacțiunile reazemelor.

Rezolvare

Metoda I. Ecuațiile de proiecții ale forțelor ce acționează asupra barei față de sistemul de referință plan Oxy sunt:

$$N_B\sin\alpha-N_D\sin\alpha=0\ ,\qquad N_O-G-N_B\cos\alpha+N_D\cos\alpha=0\ ,$$

din care rezultă:

$$N_B=N_D\ ,\qquad N_O=G\ .$$

Se observă că forțele ce acționează asupra barei formează două cupluri de forțe, astfel încât ecuația de momente pentru echilibrul barei se poate exprima în raport cu orice punct. Din această condiție de echilibru se determină valoarea comună a reacțiunilor N_B şi N_D:

$$N_Ba-G\ell\cos\alpha=0\ ,$$

$$N_B=N_D=\frac{\ell}{a}G\cos\alpha\ .$$

Metoda II. În locul sistemului de referință Oxy se va considera Ox′y′, cu axa Ox′ dirijată după axa barei, față de care ecuațiile de proiecții ale forțelor devin:

$$N_O \sin\alpha - G\sin\alpha = 0 \ , \quad N_O \cos\alpha - N_B + N_D - G\cos\alpha = 0 \ ,$$

din care se obţin aceleaşi rezultate. Se constată că cele două metode prezintă acelaşi grad de dificultate, dar, în general, se recomandă alegerea sistemului de referinţă Ox′y′, deoarece în ecuaţia de proiecţii pe axa Ox′ dispar 2 necunoscute, adică reacţiunile N_B şi N_D, care sunt perpendiculare pe bară.

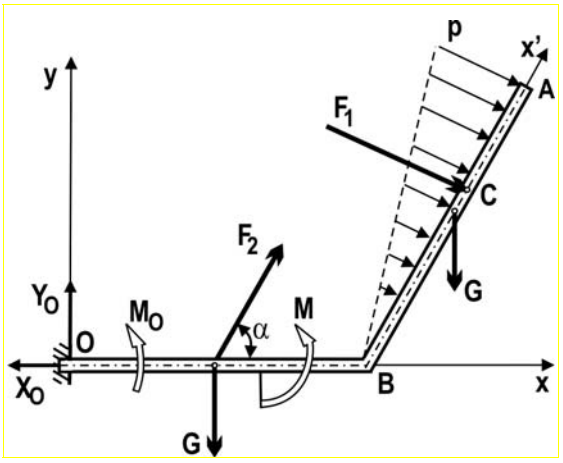


Fig. 1.4.2

1.4.2. Bara omogenă OA, de lungime 4a şi greutate 2G, îndoită la mijlocul său B sub unghiul $\pi - \alpha$ dintre cele două laturi ale sale, se află în echilibru într-un plan vertical, fiind încastrată în O în poziţia în care latura sa OB este orizontală. Pe lângă greutatea proprie, asupra barei mai acţionează ca în fig. 1.4.2, în planul său, un subsistem de forţe paralele şi linear distribuite pe latura BA, care sunt perpendiculare pe această latură şi au intensitatea maximă p în A, o forţă concentrată de valoare F_2, aplicată la mijlocul laturii OB sub unghiul α faţă de ea, precum şi un cuplu de forţe de moment M.

Să se determine:

a) rezultanta F_1 a subsistemului de forţe distribuite şi poziţia C pe latura AB a punctului său de aplicaţie;

b) reacţiunile încastrării.

Date numerice: $a = 0{,}6$ m, $\alpha = \pi/3$, $G = 200$ N, $p = 600$ N/m, $F_2 = 1{,}5$ kN, $M = 44$ Nm.

Rezolvare

a) În raport cu axa Bx′, dirijată după latura BA a barei, se obţine:

$$F_1 = \int_0^{2a} \frac{px'}{2a}dx' = pa \ , \quad x'_C = \frac{1}{F_1}\int_0^{2a} \frac{px'}{2a}x'dx' = \frac{4a}{3} \ .$$

b) În fig. 1.4.2 s-au reprezentat reacțiunile încastrării şi forțele direct aplicate ce acționează asupra barei, unde , în locul greutății barei aplicată în centrul său de greutate, s-au considerat greutățile parțiale ale laturilor sale, ale căror puncte de aplicație se determină mai uşor. Condițiile de echilibru ale barei față de sistemul de referință Oxy devin:

$$-X_O + F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha = 0 \ , \quad Y_O - F_1 \cos\alpha + F_2 \sin\alpha - 2G = 0 \ ,$$

$$M_O + M - Ga - G\left(2a + a\cos\alpha\right) - F_1\left(2a\cos\alpha + x'_C\right) + F_2 a \sin\alpha = 0 \ ,$$

din care rezultă:

$$X_O = pa\sin\alpha + F_2\cos\alpha \ , \quad Y_O = pa\cos\alpha + 2G - F_2\sin\alpha \ ,$$

$$M_O = Ga\left(3 + \cos\alpha\right) + pa^2\left(2\cos\alpha + \frac{4}{3}\right) - F_2 a\sin\alpha - M \ .$$

Pentru datele numerice din enunț se obține:

$$X_O = 1012 \text{ N} \ , \quad Y_O = -720 \text{ N} \ , \quad M_O = 100 \text{ Nm} \ .$$

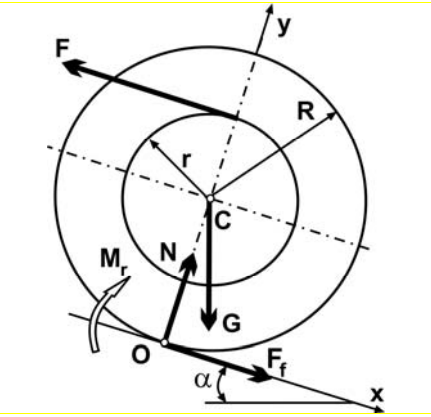


Fig. 1.4.3

1.4.3. Să se studieze echilibrul unui troliu omogen de greutate G, având razele tamburilor r şi R, aşezat pe un plan înclinat cu unghiul α față de planul orizontal, asupra căruia acționează ca în fig. 1.4.3 o forță F paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat, aplicată la capătul unui fir ideal, înfăşurat pe tamburul de rază r al troliului. Se cunosc coeficienții de frecare de alunecare μ şi de rostogolire s dintre troliu şi planul înclinat.

Rezolvare

În fig. 1.4.3 s-au reprezentat sensurile pentru forța de frecare de alunecare F_f şi pentru momentul de rostogolire M_r corespunzătoare tendinței de mişcare cu alunecare şi rostogolire a troliului în sus pe planul înclinat. Se alege sistemul de referință Oxy din figură, în planul vertical de echilibru al troliului, cu originea în punctul său de contact cu planul înclinat, față de care ecuațiile de echilibru sunt:

$$F_f + G\sin\alpha - F = 0 \ , \quad N - G\cos\alpha = 0 \ , \quad F\left(R + r\right) - GR\sin\alpha - M_r = 0 \ .$$

Din aceste ecuații se determină reacțiunile:

$$N = G\cos\alpha \ , \quad F_f = F - G\sin\alpha \ , \quad M_r = F(R+r) - GR\sin\alpha \ ,$$

care trebuie să verifice condițiile de echilibru cu frecare:

$$|F - G\sin\alpha| \le \mu G\cos\alpha \ , \quad |F(R+r) - GR\sin\alpha| \le sG\cos\alpha \ .$$

Notând cu $\varphi_a = \text{arctg}\mu$ unghiul de frecare de alunecare şi cu $\varphi_r = \text{arctg}\, s/R$ un unghi de frecare echivalent, corespunzător rezistenței la rostogolire, din aceste condiții rezultă:

$$G\frac{\sin(\alpha-\varphi_a)}{\cos\varphi_a} \le F \le G\frac{\sin(\alpha+\varphi_a)}{\cos\varphi_a} ,$$

$$\frac{GR}{R+r}\frac{\sin(\alpha-\varphi_r)}{\cos\varphi_r} \le F \le \frac{GR}{R+r}\frac{\sin(\alpha+\varphi_r)}{\cos\varphi_r} .$$

Deoarece, în general, s este foarte mic, raportul s/R va fi mult mai mic decât μ, astfel încât, pentru echilibrul troliului pe planul înclinat, forța F trebuie să ia valori cuprinse între cel corespunzătoare echilibrului la limită, luând în considerare numai cele două tendințe opuse de rostogolire ale troliului. Pentru acest caz, întâlnit frecvent în aplicații, condițiile de echilibru se pot exprima sub forma:

$$G\frac{\sin(\alpha-\varphi_a)}{\cos\varphi_a} \le \frac{GR}{R+r}\frac{\sin(\alpha-\varphi_r)}{\cos\varphi_r} \le F \le \frac{GR}{R+r}\frac{\sin(\alpha+\varphi_r)}{\cos\varphi_r} \le G\frac{\sin(\alpha+\varphi_a)}{\cos\varphi_a} ,$$

pe baza cărora se pot analiza posibilitățile de mişcare ale troliului pe planul înclinat.

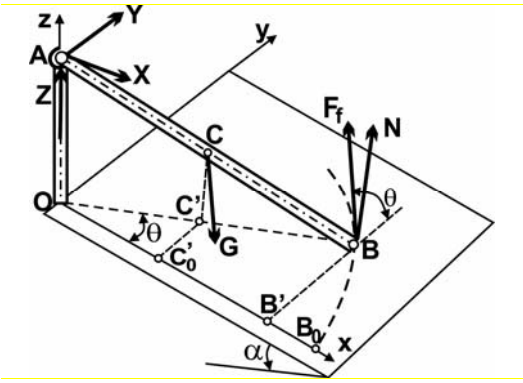


Fig. 1.4.4

1.4.4. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha \le \pi/4$ față de orizontală este fixat rigid un stâlp OA de lungime a, perpendicular pe planul înclinat. La capătul A al stâlpului este legată, printr-o articulație sferică fără frecare, bara omogenă AB, de lungime 4a şi greutate G, care se sprijină cu capătul B pe planul înclinat. Cunoscând coeficientul de frecare μ dintre bară şi planul înclinat, să se determine:

a) valorile unghiului θ dintre linia de cea mai mare pantă a planului înclinat şi dreapta OB pentru echilibrul barei;

b) pozițiile de echilibru ale barei şi reacțiunile legăturilor asupra sa în pozițiile sale de echilibru la limită, dacă valoarea coeficientului de frecare este $\mu = \left(10+\sqrt{5}\right)/19 = 0{,}644$ şi $\alpha = \pi/4$.

Rezolvare

a) În fig. 1.4.4 s-au reprezentat forța direct aplicată G şi forțele de legătură ce acționează asupra barei într-o poziție de echilibru, în care s-a ținut seama că forța de frecare F_f este perpendiculară pe dreapta OB în planul înclinat, deoarece se opune tendinței de alunecare pe planul înclinat a capătului B al barei. Față de sistemul de referință Oxyz din figură, având axa Ox după linia de cea mai mare pantă a planului înclinat şi axa Oz perpendiculară pe acesta, ecuațiile de proiecții ale forțelor pe axele de coordonate sunt:

$$X - F_f \sin\theta + G\sin\alpha = 0 \ , \quad Y + F_f \cos\theta = 0 \ , \quad Z + N - G\cos\alpha = 0 \ .$$

Pentru a putea calcula uşor momentele reacțiunii normale N şi al forței de frecare față de axele de coordonate, este util să se calculeze brațele acestor forțe:

$$OB = \sqrt{16a^2 - a^2} = \sqrt{15}a \ , \quad BB' = \sqrt{15}a\sin\theta \ , \quad OB' = \sqrt{15}a\cos\theta \ .$$

De asemenea, pentru calculul momentelor greutății G față de axele de coordonate, este util să se descompună această forță după axele planului vertical Oxz şi să se determine coordonatele centrului de greutate C al barei:

$$x_C = OC_0' = \frac{\sqrt{15}}{2}a\cos\theta \ , \quad y_C = C_0'C' = \frac{\sqrt{15}}{2}a\sin\theta \ , \quad z_C = CC' = \frac{a}{2} \ .$$

Ca urmare, ecuațiile de momente față de axele de coordonate, pentru echilibrul barei, devin:

$$\sqrt{15}Na\sin\theta - Ya - \frac{\sqrt{15}}{2}Ga\cos\alpha\sin\theta = 0 \ ,$$

$$Xa - \sqrt{15}Na\cos\theta + \frac{1}{2}Ga\sin\alpha + \frac{\sqrt{15}}{2}Ga\cos\alpha\cos\theta = 0 \ ,$$

$$\sqrt{15}F_f a - \frac{\sqrt{15}}{2}Ga\sin\alpha\sin\theta = 0 \ .$$

Din aceste ecuații şi din primele 2 ecuații de proiecții ale forțelor se determină:

$$F_f = \frac{G}{2}\sin\alpha\sin\theta \ , \quad X = \frac{G}{2}\sin\alpha\sin^2\theta - G\sin\alpha \ ,$$

$$Y = -\frac{G}{2}\sin\alpha\sin\theta\cos\theta \ , \quad N = \frac{G}{2}\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{15}}{15}\sin\alpha\cos\theta\right) \ ,$$

astfel încât, pe baza condiției de echilibru cu frecare de alunecare, rezultă:

$$\frac{G}{2}\sin\alpha|\sin\theta| \le \mu\frac{G}{2}\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{15}}{15}\sin\alpha\cos\theta\right), \quad \theta_{min} \le \theta \le \theta_{max},$$

$$\theta_{max} = \arcsin\frac{\sqrt{15}\mu\,\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{15+\mu^2}} - \mathrm{arctg}\frac{\mu}{\sqrt{15}}, \quad \theta_{min} = -\theta_{max}.$$

b) Pentru valorile date pentru μ şi α se obţin rezultatele:

$$-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}, \quad N = \frac{\sqrt{2}\left(10-\sqrt{5}\right)}{40}G = 0{,}27G, \quad F_f = \frac{\sqrt{2}}{8}G = 0{,}177G,$$

$$X = -\frac{7\sqrt{2}}{16}G = -0{,}62G, \quad Y = \pm\frac{\sqrt{6}}{16}G = \pm 0{,}15G,$$

$$Z = \left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{40}\right)G = 0{,}6G.$$

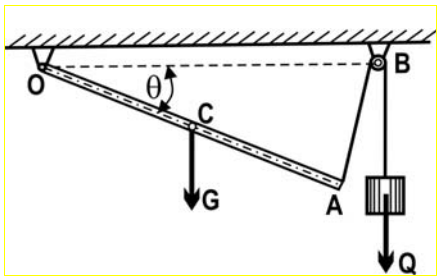


Fig. 1.4.5

1.4.5. Bara omogenă OA, de lungime 2ℓ şi greutate G, se află în echilibru într-un plan vertical, fiind articulată în O şi legată în A cu un fir trecut peste un scripete mic B, firul având atârnat la celălalt capăt un corp de greutate Q, ca în fig. 1.4.5. Scripetele B şi articulaţia O se află pe aceeaşi orizontală la distanţa $OB = 2\ell$. Neglijând frecările în articulaţii, să se determine valorile unghiului θ dintre bară şi orizontală pentru echilibrul barei, reacţiunea articulaţiei în poziţiile sale de echilibru şi să se precizeze valorile greutăţii Q pentru care există aceste poziţii de echilibru.

Răspunsuri

$$\theta_1 = 2\arccos\frac{Q+\sqrt{Q^2+2G^2}}{2G}, \quad 0 \le Q \le \frac{G}{2},$$

$$\theta_2 = 2\arccos\frac{Q-\sqrt{Q^2+2G^2}}{2G}, \quad Q \ge 0,$$

$$V_O = \frac{2G^2 - Q^2 \mp Q\sqrt{Q^2 + 2G^2}}{2G} \quad , \qquad H_O = \frac{\sqrt{2}Q}{2G}\sqrt{G^2 - Q^2 \mp Q\sqrt{Q^2 + 2G^2}} \quad .$$

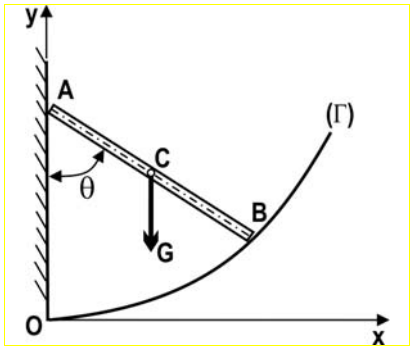


Fig. 1.4.6

1.4.6. Bara omogenă AB, de lungime ℓ şi greutate G, se află în echilibru în planul vertical Oxy, fiind rezemată fără frecare la extremităţile sale pe axa verticală Oy şi pe o curbă plană (Γ) din acest plan, ca în fig. 1.4.6. Să se determine:

a) ecuaţia curbei (Γ) faţă de sistemul de referinţă Oxy, astfel încât bara să se afle în echilibru în orice poziţie determinată de unghiul $\theta \in [0, \pi/2)$ dintre ea şi verticală;

b) reacţiunile reazemelor în funcţie de θ şi în funcţie de abscisa x a punctului B pentru curba (Γ) determinată.

Răspunsuri

a) $y = \frac{\ell}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}}\right)$, $0 \le x \le \ell$;

b) $N_A = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\theta = \frac{G}{2}\frac{x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}}$, $N_B = \frac{G}{2}\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\theta} = \frac{G}{2}\sqrt{\frac{4\ell^2 - 3x^2}{\ell^2 - x^2}}$.

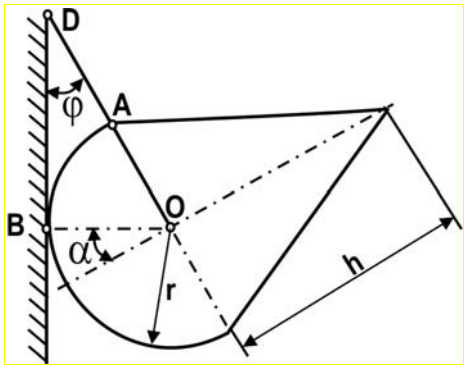


Fig. 1.4.7

1.4.7. Corpul omogen de rotaţie din fig. 1.4.7, având greutatea G şi dimensiunile geometrice din figură, este simplu rezemat în B pe un perete vertical şi legat în A de punctul fix D, aparţinând aceluiaşi perete vertical, printr-un fir inextensibil de lungime r, egală cu raza cercului diametral al semisferei şi cu raza cercului de la baza conului, care formează corpul considerat. Să se determine:

a) valoarea înălţimii h a conului, exprimată în funcţie de r, astfel încât centrul de greutate al corpului să fie în punctul O, centrul cercului bazei conului, comun cu cel diametral al semisferei;

b) valorile unghiurilor φ şi α la echilibrul corpului;
c) reacţiunea reazemului şi efortul din fir în poziţia de echilibru a corpului.

Răspunsuri

a) $h = \sqrt{3}r$;

b) $\varphi = \alpha = \frac{\pi}{6}$;

c) $N = \frac{\sqrt{3}}{3}G$, $T = \frac{2\sqrt{3}}{3}G$.

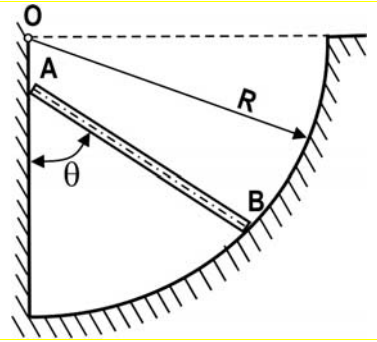


Fig. 1.4.8

1.4.8. Bara neomogenă AB, de lungime ℓ şi greutate G, având densitatea proporţională cu distanţa de la un punct curent al barei la extremitatea sa A, se află în echilibru într-un plan vertical, fiind simplu rezemată ca în fig. 1.4.8 pe un perete vertical şi pe suprafaţa interioară a unui cilindru circular de rază $R > \ell$ cu generatoarea orizontală. Să se determine:

a) poziţia centrului de greutate C al barei;

b) valoarea unghiului θ dintre bară şi verticală pentru echilibrul barei şi valorile lungimii ℓ pentru existenţa acestei poziţii de echilibru;

c) reacţiunile reazemelor în poziţia de echilibru a barei.

Răspunsuri

a) $AC = \frac{2\ell}{3}$;

b) $\theta = \arccos\frac{\sqrt{2\left(R^2 - \ell^2\right)}}{4\ell}$, $\frac{R}{3} \le \ell < R$;

c) $N_A = \frac{G}{3}\sqrt{\frac{9\ell^2 - R^2}{R^2 - \ell^2}}$, $N_B = \frac{2G}{3}\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - \ell^2}}$.

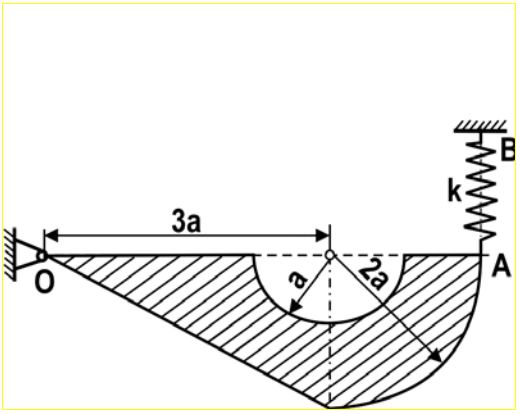


Fig. 1.4.9

1.4.9. O placă plană omogenă de greutate G, având forma şi dimensiunile din fig. 1.4.9, se află în echilibru într-un plan vertical cu latura sa OA orizontală, fiind articulată în O şi legată în A de punctul fix B printr-un arc elicoidal vertical de constantă elastică k. Să se determine:

a) coordonatele centrului de greutate al plăcii față de sistemul de referință Oxy cu axa Ox după latura sa OA şi axa Oy verticală, orientată în sens pozitiv ascendent;

b) deformația arcului până în poziția de echilibru a plăcii;

c) reacțiunea articulației în poziția de echilibru a plăcii.

Răspunsuri

a) $x_C = \dfrac{52+9\pi}{3(6+\pi)}a = 2{,}927a$,

$y_C = -\dfrac{8a}{6+\pi} = -0{,}875a$;

b) $\Delta l = \dfrac{x_C}{5a}\dfrac{G}{k} = 0{,}5854\dfrac{G}{k}$;

c) $V_O = 0{,}4146G$, $H_O = 0$.

1.4.10. O placă plană omogenă de greutate G, având forma şi dimensiunile din fig. 1.4.10, se află în echilibru într-un plan vertical cu latura sa OA orizontală, fiind articulată în O şi legată în B de punctul fix E printr-un fir inextensibil, care formează unghiul α cu verticala. Patrulaterul OABD este un trapez dreptunghic, iar tangenta în B la arcul de cerc care delimitează placa este verticală. Să se determine:

a) coordonatele centrului de greutate al plăcii față de sistemul de referință Oxy, având axele dirijate după dreptele OA, respectiv OD;

b) valorile unghiului $\alpha \in [0, \pi/2)$ pentru ca placa să poată fi în echilibru în poziția considerată;

c) reacțiunea articulației şi efortul din fir.

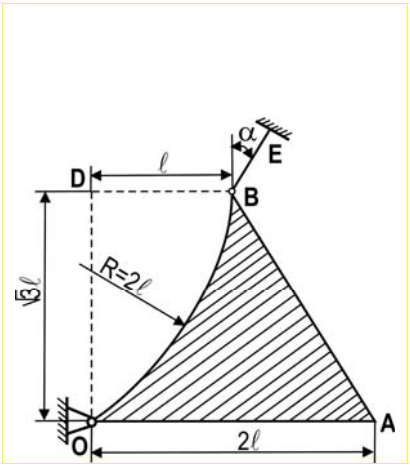


Fig. 1.4.10

Răspunsuri

a) $x_C = \dfrac{\ell}{2}\dfrac{2\pi-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\pi} = 1{,}106\ell$,

$y_C = \dfrac{\ell}{2}\dfrac{13-2\sqrt{3}\pi}{3\sqrt{3}-\pi} = 0{,}516\ell$;

b) $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{6}$;

c) $T = \dfrac{0{,}553G}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)}$,

$V_O = G - \dfrac{0{,}553\cos\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)}G = -\dfrac{0{,}106\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}G$, $\quad H_O = \dfrac{0{,}553\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)}G$.

1.4.11. Bara omogenă AL, de greutate G şi lungime 2ℓ, având atârnată greutatea Q la capătul său L, este articulată în A de un perete vertical şi ţinută în echilibru în poziţia perpendiculară pe peretele vertical prin firele inextensibile DE şi DF, legate între mijlocul D al barei şi punctele fixe E, respectiv F, aparţinând peretelui vertical. Ştiind că dreptele CE şi BF sunt verticale, că punctele A, B şi C se află pe aceeaşi orizontală şi cunoscând unghiurile α_1, α_2, β_1 şi β_2 din fig. 1.4.11, să se determine eforturile din fire şi reacţiunea articulaţiei.

Răspunsuri

$$T_E = \frac{(2Q+G)\sin\alpha_2\cos\beta_2}{\sin\alpha_1\sin\beta_2\cos\beta_1+\sin\alpha_2\sin\beta_1\cos\beta_2} ,$$

$$T_F = \frac{(2Q+G)\sin\alpha_1\cos\beta_1}{\sin\alpha_1\sin\beta_2\cos\beta_1+\sin\alpha_2\sin\beta_1\cos\beta_2} ,$$

$$X_A = T_E\cos\alpha_1\cos\beta_1 + T_F\cos\alpha_2\cos\beta_2 ,$$

$$Y_A = T_F\sin\alpha_2\cos\beta_2 - T_E\sin\alpha_1\cos\beta_1 , \quad Z_A = Q+G-T_E\sin\beta_1 - T_F\sin\beta_2 .$$

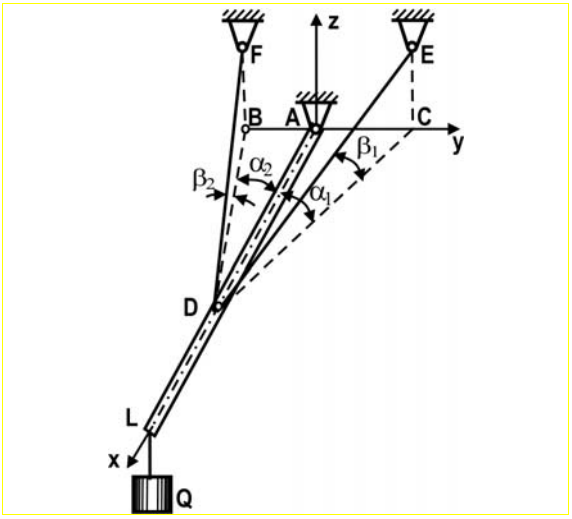


Fig. 1.4.11

1.4.12. Placa omogenă ABH din fig. 1.4.12, de forma unui triunghi dreptunghic isoscel şi de greutate G, este articulată în A de un perete vertical şi ţinută în poziţia de echilibru orizontală prin firele inextensibile BD, BE şi HE, care leagă placa de punctele fixe D şi E din acelaşi perete vertical. În prelungirea laturii HB a plăcii este legat un alt fir, care este trecut peste un scripete mic fixat în K şi are atârnată greutatea Q la celălalt capăt. Ştiind că patrulaterele ABHF şi ADEF sunt pătrate, să se determine eforturile din fire şi reacţiunea articulaţiei A. Pentru ce valori ale greutăţii Q placa rămâne în echilibru în poziţia dată?

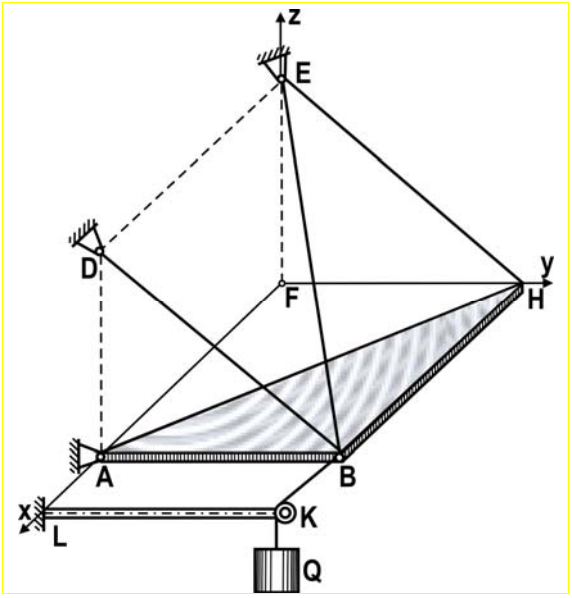


Fig. 1.4.12

Răspunsuri

$$T_{BD} = \frac{\sqrt{2}}{3}(2G - 3Q)\ ,$$

$$T_{BE} = \frac{\sqrt{3}}{3}(3Q - G)\ ,$$

$$T_{HE} = \frac{\sqrt{2}}{3}G\ ,$$

$$X_A = \frac{3Q - G}{3}\ ,$$

$$Y_A = 2G\ ,$$

$$Z_A = -2G\ ,$$

$$\frac{G}{3} \le Q \le \frac{2G}{3}\ .$$

1.4.13. Bara omogenă AB, de lungime 2ℓ şi greutate G, având atârnată greutatea Q la capătul său B, se află în echilibru într-un plan vertical în poziţia în care formează unghiul α cu orizontala, fiind sprijinită ca în fig. 1.4.13 pe două reazeme

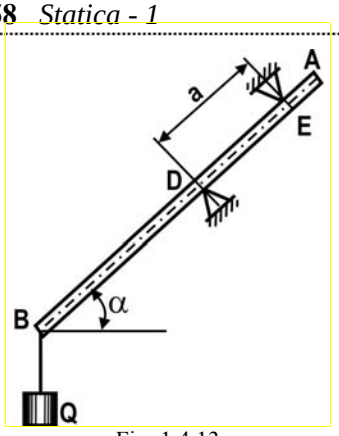


Fig. 1.4.13

aspre D şi E. Cunoscând distanţa dintre reazeme $a < \ell$, să se determine valorile coeficientului de frecare μ dintre bară şi reazeme, precum şi cele ale greutăţii Q, pentru echilibrul barei în poziţia considerată, dacă reazemul E se află la capătul său A.

Răspunsuri

Se notează $\ell/a = \lambda > 1$. Dacă $\mu \le \operatorname{tg}\alpha/(4\lambda - 1)$ bara nu poate fi în echilibru în poziţia considerată. Dacă $\mu \ge \operatorname{tg}\alpha/(2\lambda - 1)$, bara va fi în echilibru pentru orice valoare a greutăţii Q. Între aceste valori, trebuie să fie îndeplinite condiţiile:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{4\lambda - 1} < \mu < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\lambda - 1}, \qquad Q \ge G\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu(2\lambda - 1)}{\mu(4\lambda - 1) - \operatorname{tg}\alpha} > 0 .$$

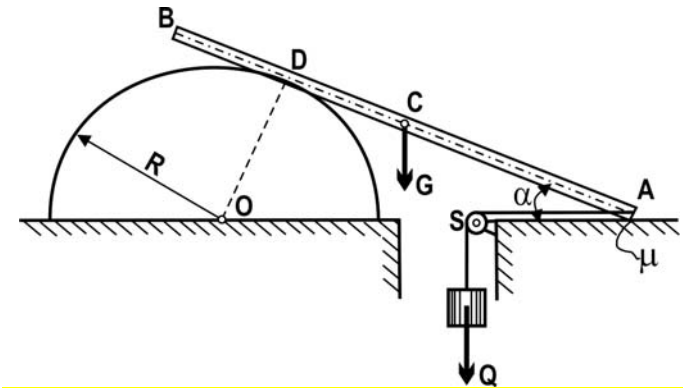


Fig. 1.4.14

1.4.14. Bara omogenă AB, de lungime ℓ şi greutate G, se află în echilibru într-un plan vertical Oxy, fiind rezemată fără frecare în D pe suprafaţa unui semicilindru circular de rază $R < \ell/2$ şi cu frecare în A pe un plan orizontal, unde coeficientul de frecare este μ. Centrul O al semicercului de intersecţie a suprafeţei cilindrice cu planul vertical de echilibru se află pe aceeaşi orizontală cu capătul A al barei, în care este legat un fir orizontal, trecut ca în fig. 1.4.14 peste un scripete mic S, având atârnată greutatea Q la celălalt capăt al său. Să se determine:

a) valorile raportului Q/G pentru echilibrul barei în poziţia sa în care unghiul format cu orizontala este α dat;

b) reacțiunile reazemelor pentru condițiile de echilibru la limită al barei în poziția considerată.

Răspunsuri

a) $\lambda\sin^2\alpha-\mu(1-\lambda\sin\alpha\cos\alpha)\le\dfrac{Q}{G}\le\lambda\sin^2\alpha+\mu(1-\lambda\sin\alpha\cos\alpha)$,

$1<\lambda=\dfrac{\ell}{2R}<\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$;

b) $N_D=G\lambda\sin\alpha$, $N_A=G\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\sin 2\alpha\right)$, $F_f=\mu N_A$.

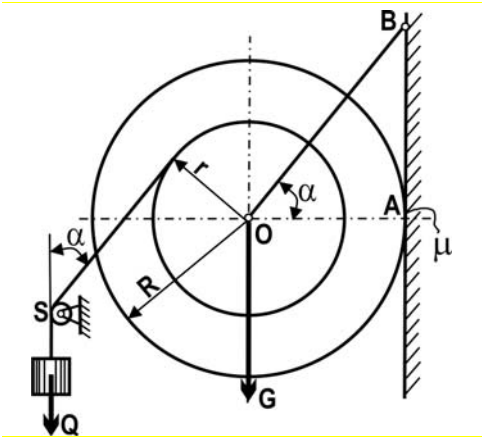


Fig. 1.4.15

1.4.15. Un troliu omogen de greutate G, având razele tamburilor R şi r, este ținut în echilibru pe un perete vertical aspru cu ajutorul unui fir inextensibil, legat între centul O al troliului şi punctul fix B din acelaşi perete vertical. Pe tamburul de rază r al troliului este înfăşurat un alt fir, care trece peste un scripete mic S şi are legat la celălalt capăt un corp de greutate Q. În fig. 1.4.15 s-a reprezentat troliul împreună cu legăturile sale în poziția sa de echilibru, şi anume în planul vertical perpendicular pe peretele vertical de sprijin, în care unghiurile dintre primul fir şi orizontală, respectiv dintre porțiunea înclinată a celui de al doilea fir şi verticală, au aceiaşi valoare α dată. Cunoscând coeficientul de frecare $\mu<1$ dintre troliu şi peretele vertical de spijin, să se determine:

a) valorile greutății Q şi ale unghiului α pentru echilibrul troliului,

b) reacțiunile reazemului din A şi efortul din firul OB în cazul echilibrului la limită al troliului.

Răspunsuri

a) $0\le Q\le\dfrac{G\mu R\cos\alpha}{r(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-\mu R\cos 2\alpha}$, $\dfrac{\pi}{4}\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

b) $T = \dfrac{G(r + \mu R \sin\alpha)}{r(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu R\cos 2\alpha}$, $N = \dfrac{Gr\cos\alpha}{r(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu R\cos 2\alpha}$,

$F_f = \mu N$.

1.5. Echilibrul sistemelor materiale

1.5.1. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 1.5.1.1), reprezentat în secțiunea cu planul său vertical de echilibru Oxy, în care se găsesc: bara BD, axa de simetrie a corpului cilindric, centrul de greutate C al platformei dreptunghiulare, încastrată în O în poziție orizontală, cei doi scripeți, precum şi toate firele de legătură dintre corpuri. Pentru fiecare corp sunt indicate pe figură greutatea sa şi dimensiunile sale geometrice. Firul legat în I de corpul cilindric este orizontal, iar toate celelalte fire sunt verticale. Frecările dintre bara BD şi corpul cilindric, precum şi cele din articulațiile scripeților, sunt neglijabile. Cunoscând $a = \ell = 10r$, $G_1 = 7G$, $G_2 = 16G$, $G_3 = 4G$, $G_4 = 40G$, $Q_1 = 9G$, $Q_2 = 84G$, $Q_3 = 8G$, să se determine:

a) unghiul θ dintre bară şi orizontală la echilibru;

b) valoarea maximă a razei R şi valoarea minimă a coeficientului de frecare μ, pentru echilibrul la limită al corpului cilindric pe platformă;

c) reacțiunile încastrării, pentru $R = 2r$ şi $\mu = 0{,}5$.

Rezolvare

Metoda I. Metoda cea mai generală pentru studiul echilibrului unui sistem de corpuri este metoda separării corpurilor, cu ajutorul căreia se determină atât pozițiile de echilibru ale sistemului, cât şi reacțiunile legăturilor exterioare şi interioare în pozițiile sale de echilibru, dacă problema este static determinată. Pentru aplicarea acestei metode, în această problemă nu mai este necesar să fie separate corpurile de greutăți Q_1, Q_2, Q_3 şi scripetele fix de greutatea G, deoarece reacțiunile legăturilor la care sunt supuse aceste corpuri au valori ce rezultă în mod evident în pozițiile lor de echilibru, care sunt, de asemenea, evidente. Pentru celelalte 4 corpuri ale sistemului, reprezentate separat în fig. 1.5.1.2) – 5) sub acțiunea forțelor direct aplicate, care sunt greutățile proprii, respectiv a reacțiunilor legăturilor, ecuațiile de echilibru sunt:

$$N_B - N_E\sin\theta = 0 \ , \quad N_E\cos\theta - G_1 - Q_1 = 0 \ ,$$

$$N_E\frac{8r}{\cos\theta} - \ell(G_1 + 2Q_1)\cos\theta = 0 \ , \quad N_E\sin\theta - N_B + Q_3 - F_f = 0 \ ,$$

$$N - N_E\cos\theta - G_2 = 0\ ,$$

$$N_B(h - 8r\,tg\theta) + \lambda G_2 - RQ_3 - hN_E\sin\theta - (4r - \lambda)N_E\cos\theta = 0\ ,$$

$$H_A - Q_3 = 0\ ,\quad V_A - G_3 - Q_3 = 0\ ,\quad F_f - H_O - H_A = 0\ ,$$

$$V_O - N + Q_2 - V_A - G_4 = 0\ ,\quad M_O + 3aQ_2 - (a + \lambda)N - 2aG_4 - 4aV_A = 0\ ,$$

din care se determină:

$$N_E = \frac{G_1 + Q_1}{\cos\theta}\ ,\quad N_B = (G_1 + Q_1)tg\theta\ ,\quad \cos^3\theta = \frac{8r(G_1 + Q_1)}{\ell(G_1 + 2Q_1)}\ ,$$

$$N = G_1 + G_2 + Q_1\ ,\quad F_f = Q_3\ ,\quad \lambda = \frac{RQ_3 + 4r(G_1 + Q_1)(1 + 2tg^2\theta)}{G_1 + G_2 + Q_1}\ ,$$

$$H_A = Q_3\ ,\quad V_A = G_3 + Q_3\ ,$$

$$H_O = Q_3 - Q_3 = 0\ ,\quad V_O = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + Q_1 + Q_3 - Q_2\ ,$$

$$M_O = 2aG_4 + 4a(G_3 + Q_3) + (a + \lambda)(G_1 + G_2 + Q_1) - 3aQ_2\ .$$

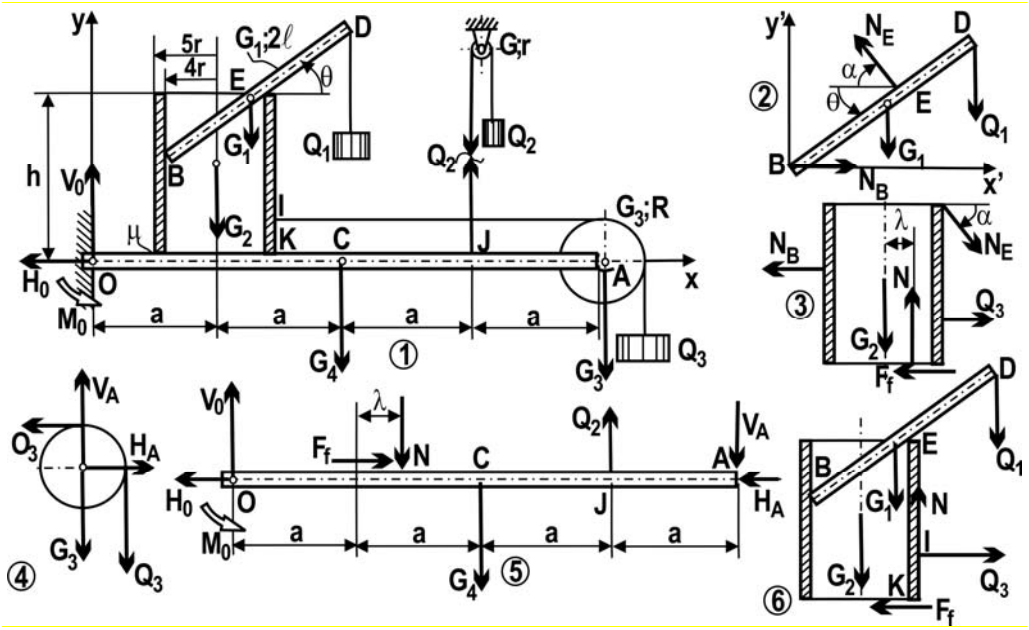


Fig. 1.5.1

Se observă că toate reacțiunile legăturilor rezultă ca funcții de greutățile corpurilor sistemului şi de parametrii de poziție θ şi λ, care se exprimă în funcție de datele problemei. Răspunsurile la întrebările din enunț se obțin prin particularizare pentru valorile date ale acestor greutăți şi ale dimensiunilor geometrice ale corpurilor.

a) Pentru $\ell = 10r$, $G_1 = 7G$ şi $Q_1 = 9G$ se obţine:

$$\cos^3\theta = \frac{8r(7G+9G)}{10r(7G+18G)} = \frac{64}{125}\ , \quad \theta = \arccos\frac{4}{5} \cong 37^\circ\ .$$

b) Pentru echilibrul corpului cilindric pe platformă, în poziţia considerată a sistemului, este necesar să se impună condiţiile:

$$0 < \lambda \le 5r\ , \quad 0 < F_f \le \mu N\ ,$$

din care, pentru θ determinat şi valorile greutăţilor din enunţ, rezultă:

$$\lambda = \frac{R+17r}{4} \le 5r\ , \quad F_f = 8G \le 32\mu G\ , \quad R \le 3r\ , \quad \mu \ge \frac{1}{4} = 0{,}25\ .$$

Valorile extreme pentru R şi μ, corespunzătoare echilibrului la limită, se obţin luând egalitatea în ultimele 2 relaţii de mai sus.

c) Pentru $R = 2r$, $a = 10r$ şi valorile greutăţilor din enunţ se determină λ, V_O şi M_O, deoarece $H_O = 0$, astfel încât rezultă:

$$\lambda = \frac{19r}{4}\ , \quad V_O = 0\ , \quad M_O = Gr(800+480+472-2520) = -768Gr\ .$$

Metoda II. În această problemă nu se cer reacţiunile legăturilor interioare, prin urmare volumul de calcul va fi mult mai mic dacă se aplică metoda separării parţiale, prin care se separă subsisteme de corpuri din sistemul dat, având legăturile interioare rigidizate şi solidarizate de corpurile subsistemului considerat pentru rezolvarea fiecărui punct al problemei.

a) Primul subsistem trebuie să fie constituit numai din bara BD, care este în echilibru în panul vertical Bx′y′ sub acţiunea forţelor din fig. 1.5.1.2). Deoarece nu se cer reacţiunile reazemelor din B şi E, este suficient să se scrie ecuaţia de proiecţii ale forţelor pe axa By′ şi ecuaţia de momente faţă de B, din care, după eliminarea reacţiunii N_E, rezultă $\theta = \arccos 4/5$. Acest rezultat ne arată că centrul de greutate al barei se află chiar în punctul E în poziţia sa de echilibru, deoarece $BE = 8r/\cos\theta = 10r = \ell$.

b) În fig. 1.5.1.6) s-a reprezentat al doilea subsistem de corpuri, constituit din bara BD şi corpul cilindric, aflat la limita răsturnării în jurul punctului K şi la limita alunecării imprimate de forţa orizontală Q_3. Condiţiile de echilibru la limită devin:

$$Q_3 - F_f = 0\ , \quad N - G_1 - G_2 - Q_1 = 0\ ,$$
$$5rG_2 + rG_1 - 7rQ_1 - RQ_3 = 0\ , \quad F_f = \mu N\ ,$$

din care se determină:

$$F_f = 8G\ , \quad N = 32G\ , \quad R_{max} = \frac{Gr(80+7-63)}{8G} = 3r\ , \quad \mu_{min} = \frac{8G}{32G} = \frac{1}{4}\ .$$

c) Deoarece valorile date pentru R şi μ îndeplinesc condiţiile de echilibru ale corpului cilindric pe platformă, sistemul de corpuri se va afla în echilibru în poziţia sa

în care unghiul θ are valoarea determinată. Pentru determinarea reacțiunilor încastrării, al treilea subsistem de corpuri va fi constituit din toate corpurile sistemului rămase după tăierea firului vertical legat în J de platformă. Subsistemul considerat trebuie să fie în echilibru sub acțiunea reacțiunilor încastrării, a greutăților corpurilor sale şi a efortului Q_2 din firul tăiat, aşa cum este reprezentat în fig. 1.5.1.1), în care trebuie să se țină seama de faptul că greutatea G_1 este aplicată chiar în punctul E, unde se află mijlocul barei BD în poziția sa de echilibru. Prin urmare, ecuațiile de echilibru devin:

$$H_O = 0\ , \quad V_O - G_1 - G_2 - G_3 - G_4 - Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0\ ,$$

$$M_O + 3aQ_2 - aG_2 - (a+4r)G_1 - (a+12r)Q_1 - 2aG_4 - 4aG_3 - (4a+R)Q_3 = 0\ ,$$

din care rezultă $V_O = H_O = 0$, iar momentul încastrării va fi:

$$M_O = Gr(160 + 98 + 198 + 800 + 160 + 336 - 2520) = -768Gr\ .$$

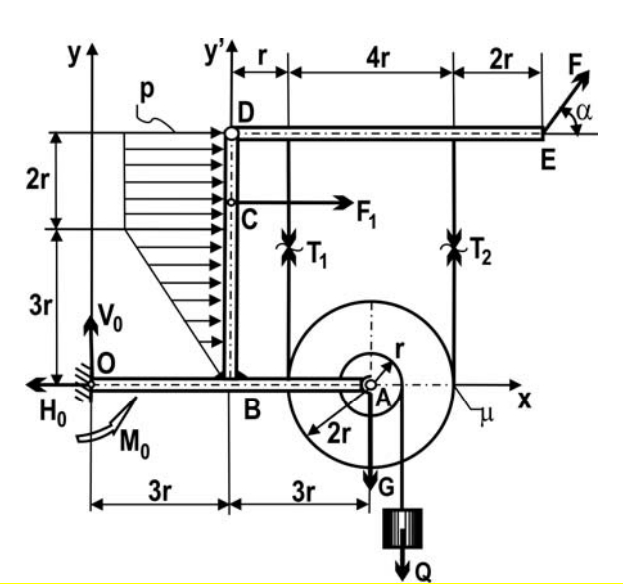


Fig. 1.5.2

1.5.2. Sistemul de corpuri omogene din fig. 1.5.2, în care sunt indicate dimensiunile geometrice ale corpurilor, se află în echilibru în planul vertical Oxy, sub acțiunea greutății G a troliului, articulat la capătul A al grinzii orizontale OA de greutate neglijabilă, a greutății Q a sarcinii, a forțelor paralele orizontale de intensitate maximă p, distribuite ca în figură pe bara verticală BD de greutate neglijabilă, precum şi a forței F, aplicată sub unghiul α la capătul E al pârghiei DE, de asemenea de greutate neglijabilă, care este articulată în D şi se găseşte în poziție orizontală atunci când firul inextensibil înfăşurat pe tamburul de rază 2r al troliului este întins. Neglijând frecările din articulații şi cunoscând coeficientul de frecare $\mu = \ln 7/\pi$ dintre tamburul de rază 2r al troliului şi firul înfăşurat pe el, să se determine:

a) rezultanta F_1 şi centrul C pentru forțele paralele distribuite;
b) valoarea minimă a forței F pentru echilibrul sistemului;
c) reacțiunile încastrării din O a grinzii pentru $F = 2F_{min}$.

Date numerice: $\alpha = \text{arctg}3$, $r = 5$ cm, $G = 200$ N, $Q = 2{,}8$ kN, $p = 2$ kN/m.

Rezolvare

a) În raport cu axa verticală By′ din fig. 1.5.2, dirijată după bara BD, rezultă:

$$F_1 = \int_0^{3r} \frac{p}{3r} y'dy' + \int_{3r}^{5r} pdy' = \frac{3}{2}pr + 2pr = \frac{7}{2}pr \ ,$$

$$y_C = y'_C = \frac{1}{F_1}\left(\int_0^{3r} \frac{py'}{3r} y'dy' + \int_{3r}^{5r} py'dy' \right) = \frac{2}{7pr}\left(3pr^2 + 8pr^2\right) = \frac{22r}{7} \ .$$

b) Pentru determinarea valorii minime a forței F, corespunzătoare echilibrului la limită al troliului, datorită frecării firului înfăşurat pe tamburul său de rază 2r sub unghiul la centru de 180°, ar trebui să fie separate corpurile între care este legat acest fir, adică troliul şi pârghia DE. În această problemă nu se cer reacțiunile din articulațiile A şi D ale corpurilor amintite, astfel încât este suficient să se considere tăiate porțiunile verticale ale acestui fir şi să se scrie ecuațiile de momente față de articulații ale celorlalte forțe ce acționează asupra acestor corpuri, în afara reacțiunilor din articulații, între care se numără şi eforturile T_1 şi T_2 din fir, aşa cum sunt reprezentate în fig. 1.5.2. Prin urmare, condițiile de echilibru la limită ale acestor corpuri devin:

$$7rF\sin\alpha - rT_1 - 5rT_2 = 0 \ , \quad 2rT_2 - 2rT_1 - rQ = 0 \ , \quad T_2 = T_1 e^{\mu\pi} \ ,$$

din care, pentru valoarea lui μ dată în enunț, se determină:

$$T_1 = \frac{Q}{12} \ , \quad T_2 = \frac{7Q}{12} \ , \quad F_{min} = \frac{3Q}{7\sin\alpha} \ .$$

c) Pentru determinarea reacțiunilor încastrării se impune aplicarea metodei rigidizării sistemului în poziția sa de echilibru, deoarece nu se cer reacțiunile legăturilor interioare. Prin aplicarea acestei metode, se obțin următoarele ecuații:

$$-H_O + F_1 + F\cos\alpha = 0 \ , \quad V_O - G - Q + F\sin\alpha = 0 \ ,$$

$$M_O - F_1 y_C - 6rG - 7rQ - 5rF\cos\alpha + 10rF\sin\alpha = 0 \ ,$$

din care, pentru $F = 2F_{min}$ şi cu valorile F_{min}, F_1, y_C determinate anterior, rezultă:

$$H_O = \frac{7}{2}pr + \frac{6}{7}Q\,ctg\alpha \ ,$$

$$V_O = G + Q - \frac{6}{7}Q = G + \frac{Q}{7} \ ,$$

$$M_O = 11pr^2 + 6Gr + 7Qr + \frac{30}{7}Qr\,ctg\alpha - \frac{60}{7}Qr = r\left(11pr + 6G + \frac{30ctg\alpha - 11}{7}Q\right) \ .$$

Pentru datele numerice din enunț se obțin următoarele valori ale reacțiunilor încastrării:

$$H_O = 1{,}15 \text{ kN} ,$$
$$V_O = 600 \text{ N} ,$$
$$M_O = 95 \text{ Nm} .$$

1.5.3. Un fir omogen de greutate specifică lineară γ se află în echilibru în planul vertical Oxy ca în fig. 1.5.3.1), un capăt al său fiind legat în punctul fix A, porțiunea sa BD fiind sprijinită fără frecare pe periferia unui disc circular fix, situat în planul de echilibru al firului, având centrul O_1 şi raza R, iar ultima sa porțiune DE atârnă pe verticală.

Cunoscând ordonatele punctelor O_1 şi P_0 din figură, P_0 fiind punctul cel mai de jos al porțiunii AB al firului, $\alpha = 5\pi/12$, $\beta = 5\pi/6$ şi efortul $T_0 = \gamma R$ în fir în punctul P_0, să se determine:

a) lungimea b a porțiunii DE a firului;
b) lungimea totală a firului;
c) abscisa x_C a centrului de greutate C al întregului fir, aflat în poziția sa de echilibru.

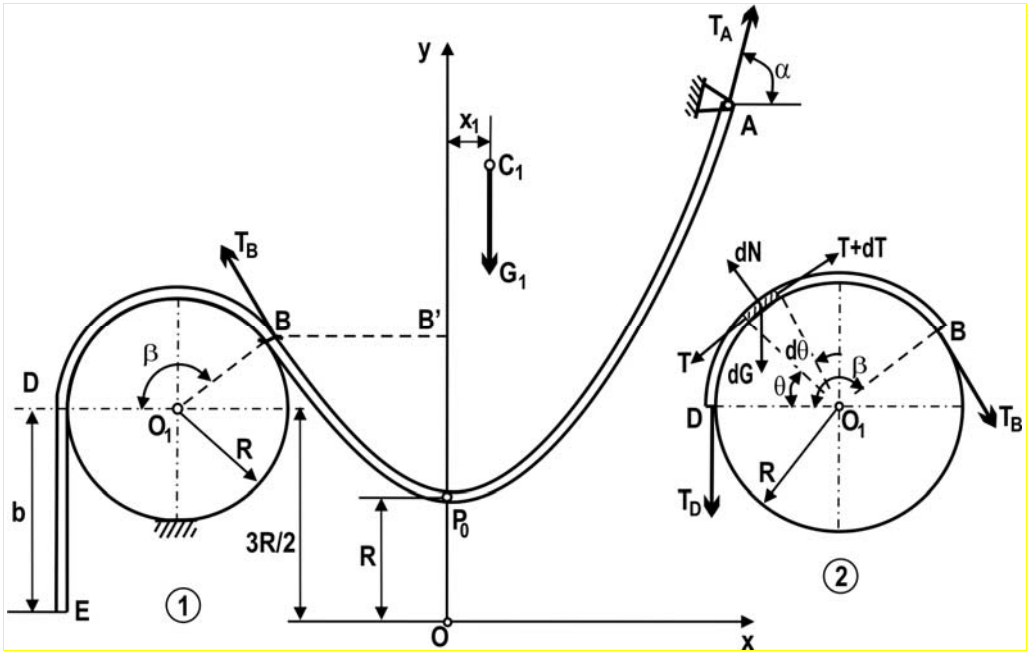


Fig. 1.5.3

Rezolvare

a) Se ştie că ecuaţia curbei plane de echilibru a unui fir omogen greu faţă de sistemul de referinţă Oxy, situat în planul său vertical de echilibru, având axa Ox orizontală la distanţa a de punctul P_0 cel mai de jos al firului şi axa Oy verticală ce trece prin P_0 este $y = a\,ch(x/a)$, iar efortul în fir în punctul său curent $P(x, y)$ este $T = \gamma y$. De aici rezultă imediat $T_0 = \gamma a = \gamma R$, deci $a = R$. Ca urmare, efortul în fir la capătul B al porţiunii sale AB trebuie să fie:

$$T_B = \gamma y_B = \gamma\left(\frac{3R}{2} + R\sin(\pi - \beta)\right) = 2\gamma R \ .$$

Pe de altă parte, aceeaşi valoare a efortului T_B trebuie să rezulte din studiul echilibrului porţiunii de fir DB, care este supusă la legătura fără frecare pe o suprafaţă cilindrică. În fig. 1.5.3.2) s-a separat această porţiune de fir în poziţia sa de echilibru pe legătură, unde $T_D = \gamma b$ reprezintă greutatea G_3 a porţiunii DE. Asupra unui element de fir de lungime $ds = Rd\theta$ acţionează greutatea sa $dG = \gamma ds$, reacţiunea normală dN a legăturii, precum şi eforturile din fir la capetele elementului considerat, dirijate după tangentele corespunzătoare la curba de echilibru a firului. Deoarece aici nu se cere variaţia reacţiunii normale N a legăturii cu unghiul θ, care este parametrul de poziţie al elementului de fir considerat, pentru echilibrul său este mai uşor să se scrie ecuaţia de momente ale forţelor ce acţionează asupra lui în raport cu O_1, astfel încât rezultă:

$$TR + \gamma R^2\cos\theta d\theta - R(T + dT) = 0 \ , \quad T_B = T_D + \gamma R\int_0^{\frac{5\pi}{6}}\cos\theta d\theta = \gamma\left(b + \frac{R}{2}\right) \ .$$

În urma comparării acestui rezultat cu valoarea determinată anterior pentru T_B, se obţine $b = 3R/2$.

b) Lungimea totală a firului se compune din lungimea ℓ_1 a porţiunii sale AB, din lungimea ℓ_2 a arcului de cerc BD cu unghiul la centru β şi din lungimea ℓ_3 a porţiunii sale DE. Deoarece $\ell_3 = b = 3R/2$ şi $\ell_2 = R\beta = 5\pi R/6$, mai rămâne de determinat ℓ_1, pentru care se prezintă în continuare 2 metode.

Metoda I. Ecuaţia curbei de echilibru a porţiunii AB a firului fiind cunoscută, se poate determina ℓ_1 efectuând integrala din ds pe această curbă între punctele B şi A, astfel încât se obţine:

$$\ell_1 = \int_{x_B}^{x_A} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{x_B}^{x_A} \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = a\left(\operatorname{sh}\frac{x_A}{a} - \operatorname{sh}\frac{x_B}{a}\right) = R\left(\sqrt{\frac{y_A^2}{R^2}-1} + \sqrt{\frac{y_B^2}{R^2}-1}\right) =$$

$$= R\left(\sqrt{2\left(\sqrt{3}+1\right)^2 - 1} + \sqrt{3}\right) = 2R\left(\sqrt{3}+1\right),$$

unde ordonata punctului A s-a determinat din condițiile:

$$T_A \cos\alpha = T_0 = \gamma R \ ,$$

$$y_A = \frac{T_A}{\gamma} = \frac{R}{\cos\alpha} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)R \ .$$

Metoda II. Deoarece greutatea porțiunii de fir AB este $G_1 = \gamma \ell_1$, se poate determina mai uşor lungimea sa din ecuațiile de proiecții pe orizontală şi pe verticală ale forțelor ce acționează asupra sa în poziția sa de echilibru, care sunt eforturile din fir la capetele sale şi greutatea G_1. În fig. 1.5.3.1) s-au reprezentat aceste forțe, în cazul în care firul este secționat în B şi porțiunea sa AB este rigidizată în poziția sa de echilibru. Din această figură rezultă:

$$\gamma y_A \cos\alpha - 2\gamma R \sin(\pi - \beta) = 0 \ ,$$

$$\gamma y_A \sin\alpha + 2\gamma R \cos(\pi - \beta) - \gamma \ell_1 = 0 \ ,$$

$$y_A = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)R \ , \quad \ell_1 = 2\left(\sqrt{3}+1\right)R \ .$$

Lungimea ℓ a întregului fir va avea valoarea:

$$\ell = R\left(\frac{3}{2} + \frac{5\pi}{6} + 2\left(\sqrt{3}+1\right)\right) = 9{,}582R \ .$$

c) Ecuația de momente ale forțelor ce acționează asupra porțiunii de fir AB în raport cu proiecția B′ a punctului B pe axa Oy este:

$$\gamma y_A x_A \sin\alpha + 2\gamma R x_B \cos(\pi - \beta) - \gamma R\left(y_A - 2R\right) - \gamma \ell_1 x_1 = 0 \ ,$$

din care, după determinarea absciselor x_A şi x_B:

$$x_A = R \operatorname{arg\,ch}\frac{y_A}{R} = R \ln\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right) \ ,$$

$$x_B = R \operatorname{arg\,ch} 2 = -R \ln\left(2+\sqrt{3}\right) \ ,$$

se obține:

$$x_1 = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\ln\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right) - \sqrt{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\right)}{2\left(\sqrt{3}+1\right)} R = 0{,}626R.$$

Abscisa x_2 a centrului de greutate al arcului de cerc BD şi abscisa x_3 a celui al porţiunii verticale a firului vor fi:

$$x_2 = x_B - R\cos(\pi-\beta) - \frac{2R}{3}\frac{2}{\beta}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= -R\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{5\pi}\right) = -2{,}31R \ ,$$

$$x_3 = x_B - R\cos(\pi-\beta) - R = -R\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) = -3{,}183R \ ,$$

astfel încât rezultă:

$$x_C = \frac{x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + x_3\ell_3}{\ell} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 0{,}626 - (5\pi/6)\cdot 2{,}31 - 1{,}5\cdot 3{,}183}{9{,}582}R = -0{,}772R$$

.

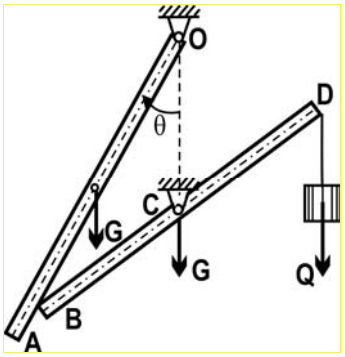


Fig. 1.5.4

1.5.4. Bara omogenă OA, de lungime 2ℓ şi greutate G, este articulată în O şi se sprijină pe capătul B al barei identice BD, care este articulată la mijlocul său C şi are atârnată greutatea Q la celălalt capăt. Ştiind că articulaţiile O şi C se află pe aceeaşi verticală la distanţa $OC = \ell$ şi neglijând frecările, să se determine:

a) valorile unghiului θ dintre bara OA şi verticală în poziţiile de echilibru ale sistemului şi valorile greutăţii Q pentru existenţa acestor poziţii de echilibru;

b) reacţiunile legăturilor în poziţiile de echilibru determinate.

Răspunsuri

a) $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\forall Q \geq 0$; $\theta_3 = \arccos\frac{G}{4Q}$, $Q > \frac{G}{4}$;

b) $\theta = \theta_{1,2}$: $H_O = H_C = N_B = 0$, $V_O = G$, $V_C = G+Q$;

$\theta = \theta_3$: $N_B = \frac{1}{2}\sqrt{16Q^2 - G^2}$, $H_O = H_C = \frac{G}{8Q}\sqrt{16Q^2 - G^2}$,

$$V_O = G - 2Q + \frac{G^2}{8Q} , \qquad V_C = G + 3Q - \frac{G^2}{8Q} .$$

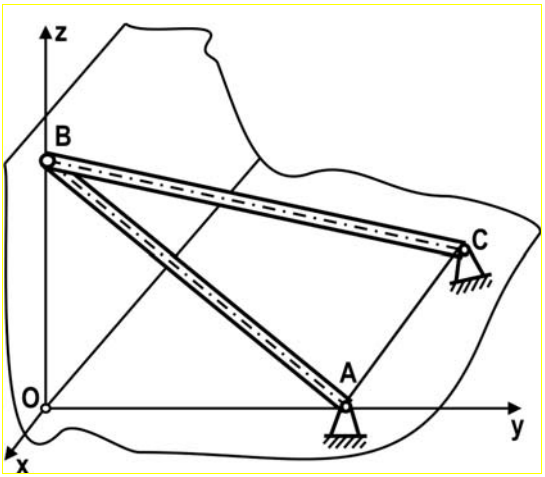


Fig. 1.5.5

1.5.5. Barele omogene AB şi BC, de greutăți G_1, respectiv G_2, articulate între ele în B şi la celelalte capete în punctele fixe A, respectiv C, se află în echilibru ca în fig. 1.5.5, unde articulațiile A şi C sunt situate în planul orizontal Oxy, iar articulația B se sprijină pe peretele vertical Oxz în punctul corespunzător de pe axa Oz. Ştiind că punctele O, A, B şi C pot fi considerate ca vârfuri ale unui cub, să se determine reacțiunile tuturor legăturilor, dacă reazemul din B este aplicat:

a) barei AB;
b) barei BC;
c) fusului articulației comune pentru cele două bare.

Răspunsuri

$$N_B = \frac{G_1 + G_2}{2} , \quad X_A = X_C = Y_C = 0 , \quad Y_A = -\frac{G_1 + G_2}{2} ,$$
$$Z_A = G_1 + \frac{G_2}{2} , \quad Z_C = \frac{G_2}{2} ;$$

a) $X_B = Y_B = 0 , \quad Z_B = -\frac{G_2}{2} ;$

b) $X_B = 0 , \quad Y_B = \frac{G_1 + G_2}{2} , \quad Z_B = -\frac{G_2}{2} ;$

c) $X_1 = X_2 = Y_2 = 0 , \quad Y_1 = \frac{G_1 + G_2}{2} , \quad Z_1 = -Z_2 = -\frac{G_2}{2} .$

1.5.6. Bara AB de lungime ℓ şi greutate neglijabilă este articulată în punctul fix A dintr-un plan orizontal şi se sprijină pe un disc circular omogen de rază R şi greutate G, care, la rândul lui, este rezemat în punctul E pe acelaşi plan orizontal şi în punctul D pe muchia unui prag de înălțime $h < R$. Sistemul astfel format se află în echilibru într-un plan vertical ca în fig.1.5.6, în care unghiul $2\alpha < \pi/2$ dintre bară şi orizontală este cunoscut, sub acțiunea unei forțe orizontale F, aplicată la capătul B al barei.

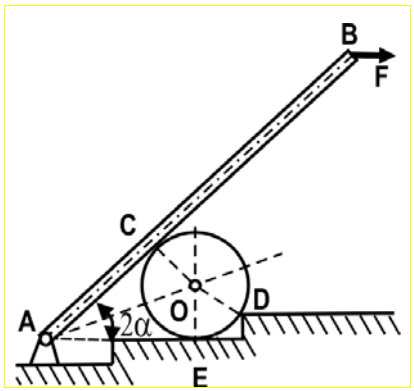


Fig. 1.5.6

a) Să se determine valorile forței F şi ale înălțimii h pentru care sistemul de corpuri se află în echilibru în poziția dată.

b) Pentru ce valori ale înălțimii h a pragului, sistemul se află în echilibru, oricât de mare ar fi valoarea forței F ?

c) Pentru $\alpha = \pi/6$ şi $h = R/2$ să se determine reacțiunile tuturor legăturilor.

Răspunsuri

a) $0 < F \le \dfrac{RG}{2\ell \sin^2 \alpha} \dfrac{\sqrt{h(2R-h)}}{(R-h)\sin 2\alpha - \sqrt{h(2R-h)}\cos 2\alpha}$, $h < R(1-\cos 2\alpha)$

.

b) $h \ge R(1-\cos 2\alpha)$.

c) $N_C = N_D = \dfrac{\ell F}{2R}$, $N_E = G$, $H_A = \dfrac{F}{4R}\left(\sqrt{3}\ell - 4R\right)$, $V_A = -\dfrac{\ell F}{4R}$.

1.5.7. Grinda cu zăbrele din fig. 1.5.7, având dimensiunile geometrice din figură, la care laturile paralele ale trapezului isoscel ABCD sunt orizontale, se află în echilibru într-un plan vertical sub acțiunea greutății Q a unui corp atârnat în A. Să se determine:

a) reacțiunile legăturilor exterioare;
b) eforturile din bare cu metoda separării nodurilor;
c) eforturile din barele 4, 5 şi 6 cu metoda secțiunilor.

Răspunsuri

a) $H_1 = -H_2 = \frac{Q}{2}$, $V_1 = 2Q$, $V_2 = -Q$;

b) $T_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}Q$, $T_2 = \frac{3}{2}Q$, $T_3 = \frac{3}{4}Q$, $T_4 = T_8 = \frac{\sqrt{5}}{2}Q$,

$T_5 = -\frac{\sqrt{13}}{4}Q$, $T_6 = \frac{3\sqrt{5}}{4}Q$, $T_7 = -\frac{1}{2}Q$.

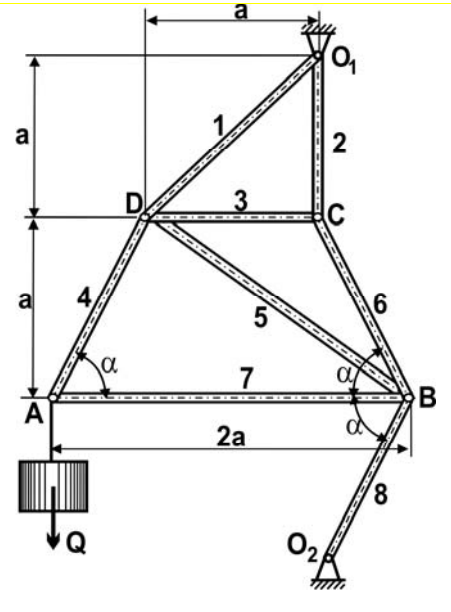


Fig. 1.5.7

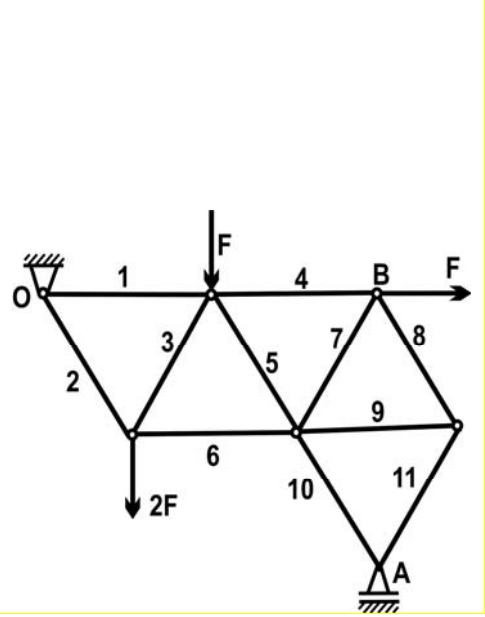


Fig. 1.5.8

1.5.8. Pentru grinda cu zăbrele din fig. 1.5.8, având toate barele de aceeaşi lungime, aflată în echilibru într-un plan vertical sub acţiunea forţelor exterioare orizontale sau verticale din figură, să se determine:

a) reacţiunile legăturilor exterioare din O şi A;

b) eforturile din barele 4, 5 şi 6, respectiv 8, 9 şi 10, folosind metoda secţiunilor.

Răspunsuri

a) $H_O = -F$, $V_O = 2F$, $N_A = F$;

b) $T_4 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}F$, $T_5 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}F$, $T_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}F$, $T_9 = -T_8 = -T_{10} = \frac{\sqrt{3}}{3}F$.

1.5.9. Un corp de greutate G se sprijină pe un perete vertical aspru, pe care este apăsat datorită unei forțe orizontale F, aplicată la capătul B al barei AB articulată în A, al cărei efect de apăsare se transmite prin altă bară OC, articulată la capete între mijlocul C al barei AB şi centrul de greutate al corpului. Sistemul astfel format se află în echilibru într-un plan vertical în poziția din fig. 1.5.9, în care articulațiile O şi A se află pe aceeaşi orizontală, $AB = 2\,OC$, iar unghiul α dintre bare şi orizontală este dat. Neglijând frecările în articulații şi greutățile barelor şi cunoscând coeficientul de frecare μ dintre corp şi peretele vertical, să se determine:

a) valorile forței F pentru echilibrul sistemului de corpuri în poziția considerată;

b) reacțiunile articulațiilor O, C şi A, precum şi ale peretelui vertical asupra corpului, dacă forța F are valoarea minimă corespunzătoare echilibrului sistemului în poziția dată.

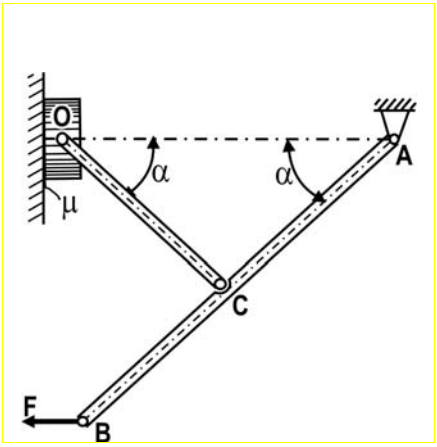


Fig. 1.5.9

Răspunsuri

a) $\frac{G}{tg\alpha + \mu} \le F \le \frac{G}{tg\alpha - \mu}$, $\mu < tg\alpha$;

b) $H_O = H_C = N = \frac{G}{tg\alpha + \mu}$, $H_A = 0$,

$V_O = V_C = V_A = \frac{Gtg\alpha}{tg\alpha + \mu}$,

$F_f = \frac{\mu G}{tg\alpha + \mu}$.

1.5.10. Un disc circular omogen de rază R şi greutate G se sprijină pe un perete vertical aspru, pe care este apăsat datorită unei forțe verticale F, aplicată la capătul B al barei AB articulată în A, al cărei efect de apăsare se transmite prin altă

bară OC, articulată la capete între mijlocul C al barei AB şi centrul discului. Sistemul de corpuri astfel format se află în echilibru într-un plan vertical în poziţia din fig. 1.5.10, în care articulaţiile O şi A sunt situate pe aceeaşi orizontală, $AB = 2\,OC$, iar unghiul α dintre bare şi orizontală este dat. Cunoscând coeficientul de frecare de alunecare μ şi cel de rostogolire $s < \mu R$ dintre disc şi peretele vertical, iar greutăţile barelor şi frecările din articulaţii fiind neglijabile, să se determine:

a) valorile forţei F pentru echilibrul sistemului de corpuri în poziţia considerată;

b) reacţiunile tuturor legăturilor pentru valoarea minimă a forţei F, corespunzătoare echilibrului la limită al sistemului în poziţia dată;

c) reacţiunile legăturilor pentru $F = G$.

Răspunsuri

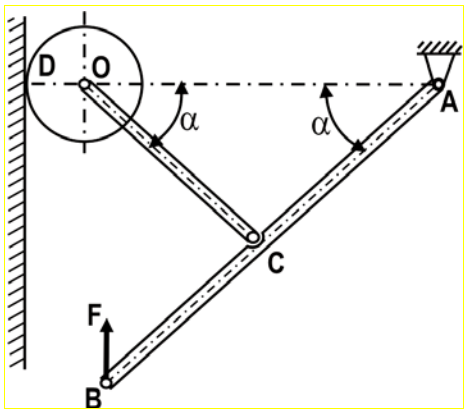


Fig. 1.5.10

a) $\dfrac{RG\,tg\alpha}{R\,tg\alpha + s} \le F \le \dfrac{RG\,tg\alpha}{R\,tg\alpha - s}$,
$s < R\,tg\alpha$, $\mu < tg\alpha$;

b) $H_O = H_C = H_A = N_D = \dfrac{RG}{R\,tg\alpha + s}$,
$V_O = V_C = \dfrac{RG\,tg\alpha}{R\,tg\alpha + s}$, $V_A = 0$,
$F_f = \dfrac{sG}{R\,tg\alpha + s} < \mu N_D$, $M_r = sN_D$;

c) $H_O = H_C = H_A = N_D = G\,ctg\alpha$,
$V_O = V_C = G$, $V_A = F_f = M_r = 0$.

1.5.11. Sistemul de corpuri omogene din fig. 1.5.11, format din bara AB de lungime ℓ şi greutate G şi dintr-un disc circular de rază R şi greutate 9G, articulate între ele în centrul discului şi la capătul B al barei, se află în echilibru într-un plan vertical, astfel încât unghiul dintre bară şi orizontală are valoarea $\alpha = \arccos(R/\ell)$. Discul se sprijină pe un plan orizontal aspru, iar frecările din reazemul A al barei pe un perete vertical şi din articulaţia B sunt neglijabile.

a) Ce valori trebuie să fie asigurate pentru coeficienţii de frecare de alunecare μ şi de rostogolire s dintre disc şi planul orizontal, astfel încât sistemul să se găsească în echilibru în poziţia dată?

b) Să se determine reacțiunile tuturor legăturilor pentru echilibrul la limită al sistemului în poziția considerată.

Răspunsuri

a) $\mu \geq \dfrac{R\sqrt{\ell^2 - R^2}}{20\left(\ell^2 - R^2\right)}$,

$s \geq \dfrac{R^2\sqrt{\ell^2 - R^2}}{20\left(\ell^2 - R^2\right)}$.

b) $N_A = H_B = F_f = \dfrac{GR}{2}\dfrac{\sqrt{\ell^2 - R^2}}{\ell^2 - R^2}$, $V_B = G$, $N_C = 10G$,

$M_r = \dfrac{GR^2}{2}\dfrac{\sqrt{\ell^2 - R^2}}{\ell^2 - R^2}$.

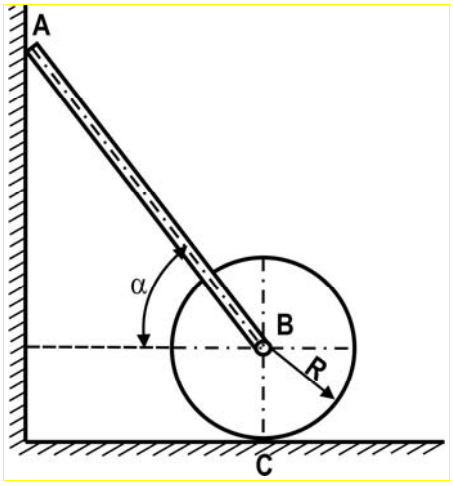


Fig. 1.5.11

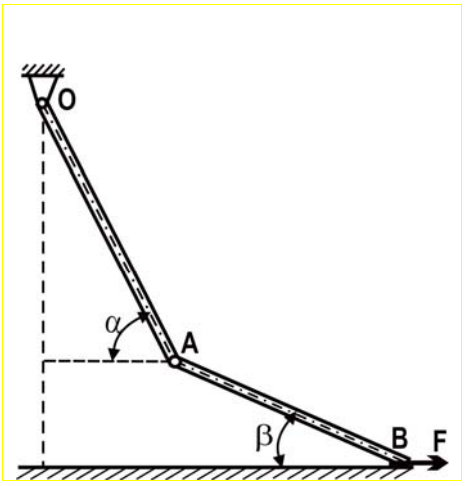


Fig. 1.5.12

1.5.12. Sistemul de 2 bare omogene din fig. 1.5.12, de lungime ℓ şi greutate G fiecare, articulate între ele la câte un capăt şi având celălalt capăt articulat în punctul fix O, respectiv rezemat în B pe un plan orizontal, se află în echilibru într-un plan vertical, astfel încât unghiurile dintre bare şi orizontală au valorile α şi β date, pentru care $tg\alpha > 3tg\beta$.

a) Neglijând frecările, să se determine valoarea forţei orizontale F, aplicată la capătul B al barei AB, pentru echilibrul sistemului în poziţia dată.

b) În absenţa forţei F, pentru ce valori ale coeficientului de frecare μ dintre bara AB şi planul orizontal va rămâne sistemul în echilibru în poziţia considerată?

c) Pentru $\alpha = 5\pi/12$, $\beta = \pi/12$ şi $\mu = \left(\sqrt{3}+1\right)/4$ să se verifice dacă sistemul se află în echilibru, iar în caz afirmativ să se determine reacţiunile legăturilor în această poziţie de echilibru.

Răspunsuri

a) $F = \dfrac{G}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

b) $\mu \geq \dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{tg}\beta}$.

c) $\mu = \mu_{min}$, $F_f = H_A = H_O = \dfrac{\sqrt{3}}{6}G$, $V_A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}G$,

$N_B = \dfrac{G}{3}\left(3-\sqrt{3}\right)$, $V_O = \dfrac{G}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)$.

1.5.13. Două corpuri paralelipipedice de greutăţi G_1, respectiv G_2, sunt legate prin articulaţii cilindrice fără frecare în centrele lor de greutate la capetele tijei omogene AB, de greutate 2G, şi se sprijină pe două plane înclinate cu unghiurile α, respectiv β, faţă de orizontală, pentru care sunt date $\alpha \leq \pi/4$ şi $\beta = \pi/2 - \alpha$. Sistemul de corpuri astfel format se află în echilibru într-un plan vertical ca în fig. 1.5.13.

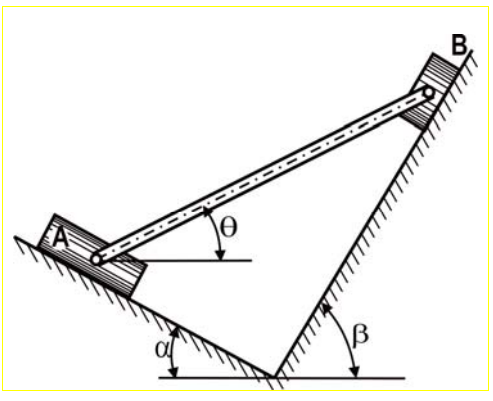


Fig. 1.5.13

a) Dacă frecările dintre corpuri şi planele înclinate sunt neglijabile, să se determine valoarea unghiului θ dintre tijă şi orizontală în poziţia de echilibru a sistemului, precum şi reacţiunile legăturilor interioare şi exterioare sistemului. Ce relaţie trebuie să fie verificată între greutăţile celor 3 corpuri, astfel încât sistemul să fie în echilibru în poziţia în care tija este orizontală? Care este valoarea unghiului θ în poziţia de echilibru a sistemului pentru $G_1 = G_2 = G$?

b) Dacă frecările dintre corpuri şi planele înclinate sunt caracterizate de unghiul de frecare $\varphi < \alpha$, acelaşi pentru ambele reazeme, să se afle valorile unghiului θ pentru echilibrul sistemului.

c) Pentru cazul particular în care $G_1 = G_2 = G$, $\alpha = \pi/4$ şi $\varphi = \pi/12$ să se determine valorile unghiului θ şi reacţiunile legăturilor în poziţiile de echilibru la limită ale sistemului.

Răspunsuri

a) $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{(G+G_2)\cos\alpha}{(G+G_1)\sin\alpha} - \alpha$, $H_A = H_B = (2G+G_1+G_2)\sin\alpha\cos\alpha$,

$V_A = (2G+G_1+G_2)\cos^2\alpha - G_1$, $V_B = (2G+G_1+G_2)\sin^2\alpha - G_2$,

$N_1 = (2G+G_1+G_2)\cos\alpha$, $N_2 = (2G+G_1+G_2)\sin\alpha$;

$\dfrac{G+G_2}{G+G_1} = \operatorname{tg}^2\alpha$; $\theta = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$.

b) $\operatorname{arctg}\dfrac{(G+G_2)\cos(\alpha+\varphi)}{(G+G_1)\sin(\alpha+\varphi)} - (\alpha+\varphi) \le \theta \le \operatorname{arctg}\dfrac{(G+G_2)\cos(\alpha-\varphi)}{(G+G_1)\sin(\alpha-\varphi)} + \varphi - \alpha$.

c) $\theta_{max} = \dfrac{\pi}{6}$, $H_A = H_B = \sqrt{3}G$, $V_A = 2G$, $V_B = 0$,

$N_1 = \dfrac{\sqrt{2}G}{2}(3+\sqrt{3})$, $F_{f1} = \dfrac{\sqrt{2}G}{2}(3-\sqrt{3})$,

$N_2 = \dfrac{\sqrt{2}G}{2}(\sqrt{3}+1)$, $F_{f2} = \dfrac{\sqrt{2}G}{2}(\sqrt{3}-1)$; $\theta_{min} = -\dfrac{\pi}{6}$,

$H_A = H_B = \sqrt{3}G$, $V_B = 2G$, $N_1 = \dfrac{\sqrt{2}G}{2}(\sqrt{3}+1)$,

$F_{f1} = \dfrac{\sqrt{2}G}{2}(\sqrt{3}-1)$, $N_2 = \dfrac{\sqrt{2}G}{2}(3+\sqrt{3})$, $F_{f2} = \dfrac{\sqrt{2}G}{2}(3-\sqrt{3})$.

1.5.14. Sistemul de 3 corpuri omogene din fig. 1.5.14 se află în echilibru într-un plan vertical, în poziţia sa în care unghiul format cu orizontala de bara OA, articulată la capete în punctul fix O şi în centrul de greutate al corpului 2, are valoarea α dată. Cunoscând greutăţile G_1, G_2, G_3 ale celor 3 corpuri, coeficientul de frecare μ_1 dintre corpul 3 şi planul orizontal pe care se reazemă, coeficientul de frecare μ_2 dintre corpurile 2 şi 3 şi neglijând frecările din articulaţii, să se determine:

a) valorile forței orizontale F, aplicată ca în figură asupra corpului 3, pentru echilibrul sistemului în poziția dată;

b) valoarea forței F şi reacțiunile articulațiilor pentru echilibrul la limită al sistemului în poziția considerată, dacă: $G_1 = 2G$, $G_2 = G$, $G_3 = 4G$, $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}5$.

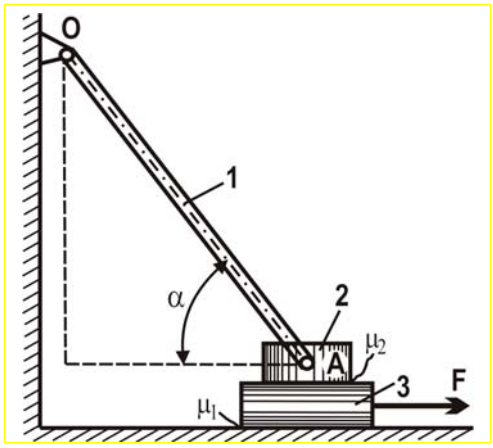


Fig. 1.5.14

Răspunsuri

a) $0 \le F \le \dfrac{G_1 + 2G_2}{2} \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{1 + \mu_2 tg\alpha} + \mu_1 G_3$;

b) $F = \dfrac{2G(4 + tg\alpha)}{2 + tg\alpha}$,

$H_A = H_O = \dfrac{2G}{2 + tg\alpha}$,

$V_A = \dfrac{G(2 - tg\alpha)}{2 + tg\alpha}$,

$V_O = \dfrac{G(2 + 3tg\alpha)}{2 + tg\alpha}$.

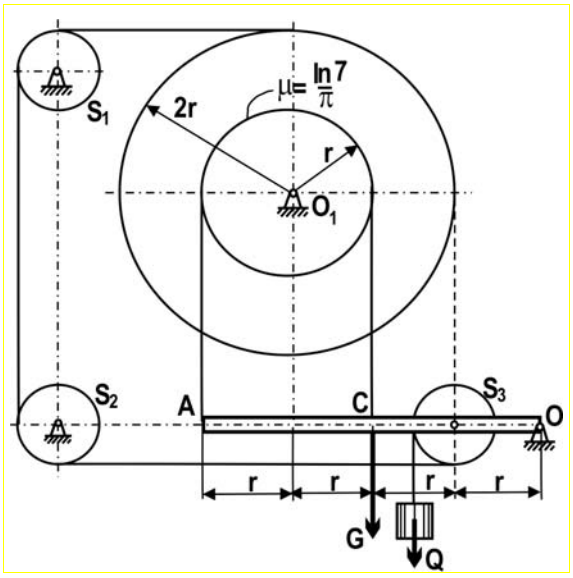


Fig. 1.5.15

1.5.15. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 1.5.15, aflat în echilibru într-un plan vertical în poziția din figură, în care bara OA de greutate G, articulată în O, este ținută în poziție orizontală printr-un fir ideal, legat la capete în punctele sale A şi C şi înfăşurat sub unghiul la centru de 180° pe tamburul de rază r al unui troliu cu axă fixă orizontală, frecarea dintre acest fir şi tambur fiind caracterizată de coeficientul de frecare $\mu = \ln 7/\pi$. Pe tamburul de rază 2r al troliului este înfăşurat un alt fir ideal, care este trecut peste 3 scripeți de greutate

neglijabilă ca în figură şi are atârnat la celălalt capăt un corp de greutate Q. Ştiind că porţiunile rectilinii ale firelor sunt orizontale sau verticale, cunoscând dimensiunile geometrice din figură şi neglijând frecările din articulaţii, să se determine valorile greutăţii Q pentru echilibrul sistemului în poziţia dată, precum şi reacţiunile articulaţiei O în cazul echilibrului la limită al sistemului.

Răspunsuri

$0 \le Q \le \frac{2}{5}G$, $H_O = \frac{2}{5}G$, $V_O = \frac{G}{3}$.

1.5.16. Grinda omogenă OA, de lungime 12r şi greutate 12G, este încastrată în O în poziţie orizontală şi de ea sunt legate ca în fig. 1.5.16, prin articulaţiile cilindrice B şi D cu fusele orizontale, sau prin fire perfect flexibile şi inextensibile, mai multe corpuri omogene de greutăţi şi dimensiuni geometrice indicate pe figură. Considerând frecările neglijabile, cu excepţia frecării dintre tamburul de rază 2r al troliului şi firul înfăşurat pe el sub unghiul la centru de 180°, caracterizată de coeficientul de frecare $\mu = \ln 2/\pi$, să se determine valorile greutăţii Q pentru echilibrul sistemului în planul vertical din figură, precum şi reacţiunile încastrării în cazul echilibrului la limită al sistemului.

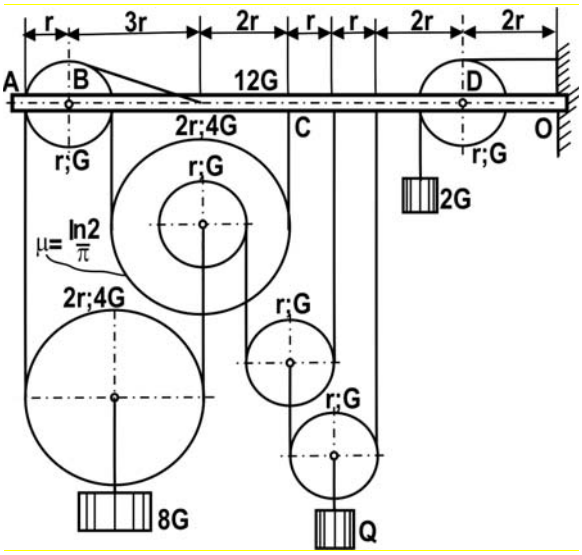


Fig. 1.5.16

Răspunsuri

$0 \le Q \le 85G$, $H_O = 2G$, $V_O = 120G$, $M_O = 682Gr$.

1.5.17. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 1.5.17, aflat în echilibru în poziția din figură, în care pârghia O_1A de greutate neglijabilă este orizontală şi axa pivotului tronconic de greutate G este verticală. Pentru modificarea forței de apăsare P a pivotului pe lagărul de pivotare corespunzător se aşează greutatea G_1 pe pârghie la distanța b de O, iar pentru imprimarea tendinței de pivotare a pivotului se atârnă greutatea G_2 la un capăt al unui fir perfect flexibil şi inextensibil, care trece peste un scripete ideal şi este înfăşura pe alt scripete solidar cu axa pivotului. Cunoscând distanța $OO_1 = a$, razele R, r_1, R_1, unghiul α şi coeficientul de frecare de alunecare μ dintre pivot şi lagăr, să se determine:

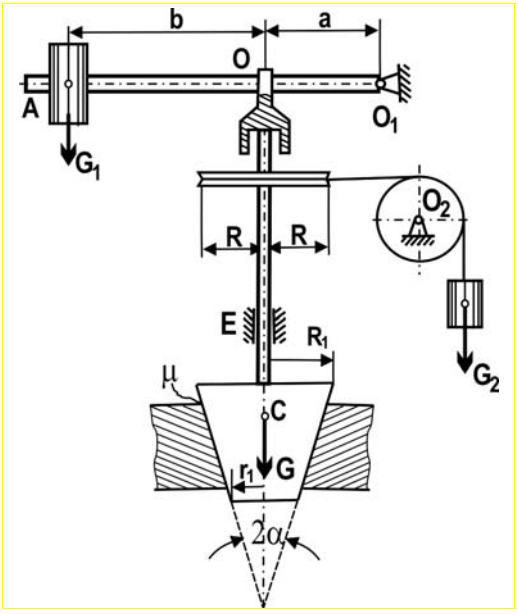


Fig. 1.5.17

a) momentul maxim al frecării de pivotare în funcție de P;

b) valoarea forței de apăsare P în funcție de G, G_1, a şi b, valoarea greutății G_2 şi reacțiunile articulațiilor O_1 şi O_2 pentru echilibrul la limită al sistemului considerat.

Răspunsuri

a) $M_{max} = \dfrac{2\mu P}{3\sin\alpha}\dfrac{R_1^3 - r_1^3}{R_1^2 - r_1^2}$;

b) $P = G + \dfrac{a+b}{a}G_1$, $G_2 = H_{O_2} = V_{O_2} = \dfrac{2}{3}\mu\dfrac{aG + (a+b)G_1}{aR\sin\alpha}\dfrac{R_1^3 - r_1^3}{R_1^2 - r_1^2}$,

$H_{O_1} = 0$, $V_{O_1} = \dfrac{b}{a}G_1$.

1.5.18. Grinda omogenă OA de greutate $G_1 = 20G$ este încastrată în O în poziție orizontală şi de ea sunt legate, prin articulații cilindrice fără frecare, pârghia BD de greutate neglijabilă, respectiv troliul omogen de greutate $G_2 = 25G$, având razele

tamburilor r şi 2r. Pe tamburul de rază r al troliului este înfăşurat un fir, de care este atârnată o sarcină de greutate $Q = 121G$, iar pe tamburul său de rază 2r se sprijină cu frecare un sabot de frână de forma din fig. 1.5.18, solidarizat de pârghie printr-o bară de greutate neglijabilă, având grosimea λ, greutatea G şi unghiul la centru al arcului de cerc corespunzător $2\alpha = \pi/3$. Sistemul de corpuri astfel format se află în echilibru într-un plan vertical sub acţiunea unei forţe F, aplicată perpendicular pe pârghie la capătul său D, datorită frecării dintre sabotul de frână şi tamburul de rază 2r al troliului, caracterizată de coeficientul de frecare $\mu = \sqrt{3}/3$. Cunoscând dimensiunile geometrice din figură, să se determine:

a) grosimea λ a sabotului de frână, astfel încât centrul său de greutate să se afle pe suprafaţa sa de contact cu tamburul;

b) valoarea forţei F şi reacţiunile încastrării în cazul echilibrului la limită al sistemului în poziţia considerată.

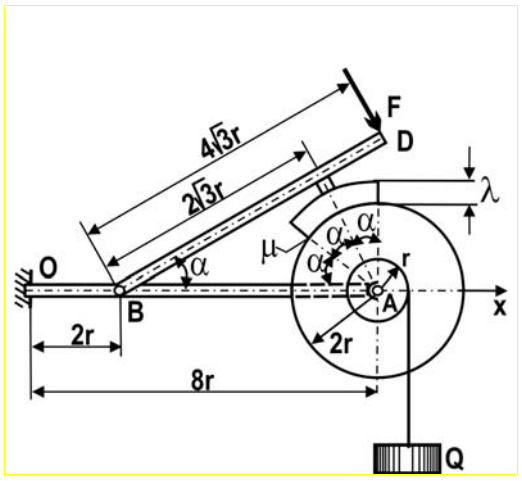


Fig. 1.5.18

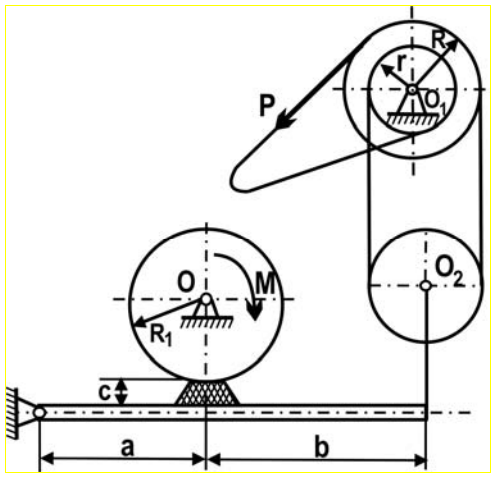


Fig. 1.5.19

Răspunsuri

a) $\lambda = \dfrac{r}{2}\left(\pi - 6 + \sqrt{(\pi-2)(\pi+6)}\right) = 0{,}185r$;

b) $F = 50\sqrt{3}G$, $H_O = 25\sqrt{3}G$, $V_O = 242G$,
$M_O = 2126Gr$.

1.5.19. Discul circular cu centrul O din fig. 1.5.19 este acţionat de un cuplu de moment M şi este frânat datorită frecării cu un sabot de frână, solidarizat ca în figură

de o pârghie orizontală, care imprimă sabotului forţa de apăsare pe disc prin intermediul unui palan diferenţial, acţionat de forţa activă P. Neglijând greutăţile pârghiei, a sabotului, a discului, a scripetelui mobil, frecările din articulaţii, rigiditatea firelor şi cunoscând coeficientul de frecare μ dintre sabot şi disc, precum şi dimensiunile geometrice din figură, să se determine valoarea forţei P şi reacţiunile articulaţiei O pentru echilibrul la limită al sistemului în planul vertical din figură.

Răspunsuri

$$P = \frac{M}{\mu R_1}\frac{a-\mu c}{a+b}\frac{R-r}{2R},$$

$$H_O = \frac{M}{R_1}, \quad V_O = \frac{M}{\mu R_1}.$$

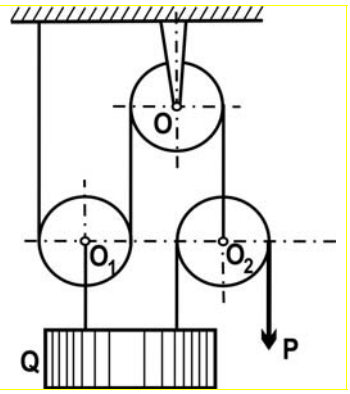


Fig. 1.5.20

1.5.20. Să se determine valorile forţei active P pentru echilibrul sistemului din fig. 1.5.20, dacă se cunosc greutatea Q şi cifra λ a fiecăruia din cei trei scripeţi de greutate neglijabilă, iar corpul de greutate Q este menţinut în poziţia din figură cu ajutorul unor ghidaje verticale fără frecare, care nu au mai fost reprezentate.

Răspuns

$$\frac{Q}{\lambda+\lambda(1+\lambda)^2} \le P \le \frac{\lambda^3 Q}{\lambda^2+(1+\lambda)^2}.$$

1.5.21. Să se determine valorile greutăţii P pentru echilibrul sistemului din fig. 1.5.21, ştiind că toţi scripeţii de greutate neglijabilă au aceeaşi cifră λ, cunoscând greutatea Q şi coeficientul de frecare μ dintre aceasta şi reazemul său orizontal, dacă bara AB, de asemenea de greutate neglijabilă, este menţinută în poziţie orizontală cu ajutorul unor ghidaje verticale fără frecare, care nu au mai fost reprezentate.

Răspuns

$$P \le \lambda\mu Q \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} .$$

1.5.22. Un troliu omogen de greutate P este montat, prin intermediul unor articulații cilindrice cu frecare, în interiorul unui bloc cubic de greutate G, astfel încât centrele de greutate ale celor două corpuri să coincidă. Pe tamburul de rază r al troliului este înfăşurat un fir, având celălalt capăt legat de un tavan, iar pe tamburul său de rază R
este înfăşurat alt fir, având legat la celălalt capăt un corp de greutate Q.

Cunoscând cifra troliului λ şi neglijând frecările din ghidajele verticale ale blocului cubic, să se determine valorile greutății Q pentru echilibrul sistemului de corpuri în poziția sa din fig. 1.5.22.

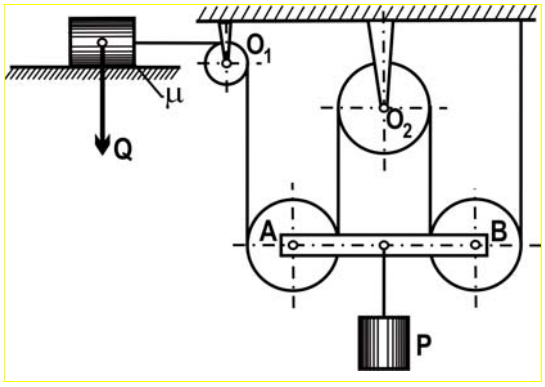


Fig. 1.5.21

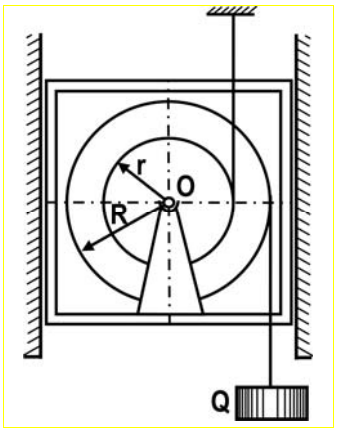


Fig. 1.5.22

Răspuns

$$\frac{r(P+G)}{\lambda R - r} \le Q \le \frac{\lambda r(P+G)}{R - \lambda r} , \qquad R > \lambda r .$$

1.5.23. Pentru mecanismul de ridicat din fig. 1.5.23, prevăzut cu o frână cu sabot, se cunosc dimensiunile geometrice din figură, unghiul α, coeficientul de frecare μ dintre sabotul de frână şi troliu, cifra λ a scripeţilor şi a troliului, greutatea Q a sarcinii şi se neglijează greutăţile celorlalte corpuri din sistem. Să se determine valoarea forţei verticale F de acţionare a frânei şi reacţiunile legăturilor din O, A, C şi D pentru echilibrul la limită al sistemului.

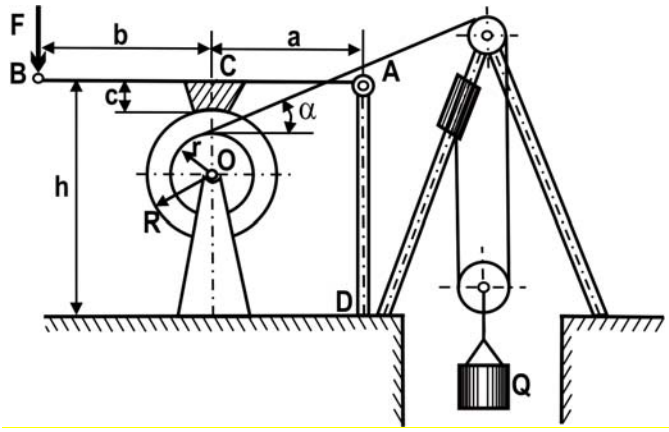


Fig. 1.5.23

Răspunsuri

$$F_{min}=\frac{Qr(a-\mu c)}{\mu R\lambda^2(1+\lambda)(a+b)}\ ,\ N_C=\frac{Qr}{\mu R\lambda^2(1+\lambda)}\ ,\ F_f=H_A=H_D=\frac{Qr}{R\lambda^2(1+\lambda)}\ ,$$

$$V_A=V_D=\frac{Qr(b+\mu c)}{\mu R\lambda^2(1+\lambda)(a+b)}\ ,H_O=\frac{Q(\lambda R\cos\alpha-r)}{R\lambda^2(1+\lambda)}\ ,\ V_O=\frac{Q(\mu\lambda R\sin\alpha-r)}{\mu R\lambda^2(1+\lambda)}\ ,$$

$M_D=hH_D$.

1.5.24. Pentru sistemul de corpuri din fig. 1.5.24, la care culisorul solidar cu bara orizontală de lungime ℓ se poate mişca fără frecare pe tija verticală O_1O_2, se cunosc razele troliului, cifra λ a troliului şi a scripeţilor, greutatea Q şi se neglijează greutăţile celorlalte corpuri din sistem. Să se determine valorile forţei active P pentru echilibrul sistemului şi înălţimea h a culisorului pentru ca suma reacţiunilor tijei asupra sa să nu depăşească valoarea nQ, ştiind că firele de legătură dintre troliu şi scripeţi formează cu verticala unghiuri foarte mici.

Răspunsuri

$$\frac{Q\left(R-\lambda^3 r\right)}{\lambda\left(\lambda+1\right)R} \le P \le \frac{Q\left(\lambda^3 R-r\right)}{\lambda\left(\lambda+1\right)R}\ , \qquad h \ge \frac{2\ell}{n}\ .$$

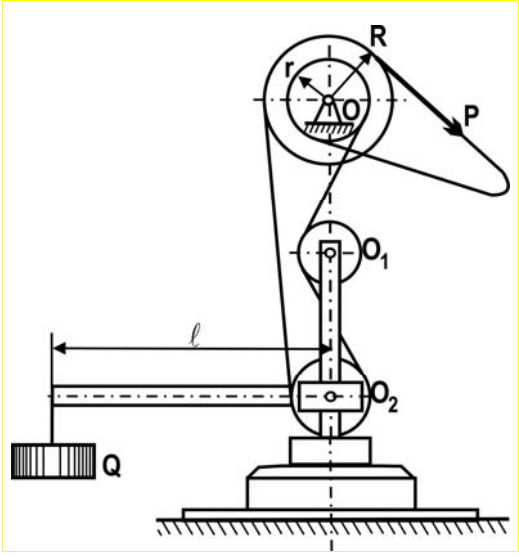


Fig. 1.5.24

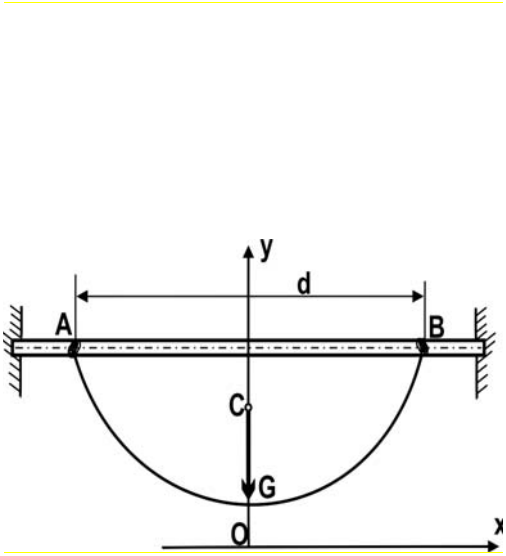


Fig. 1.5.25

1.5.25. Un fir omogen greu, perfect flexibil şi inextensibil, având greutatea G şi lungimea ℓ, este legat la capete de două inele mici de greutate neglijabilă, care se sprijină ca în fig. 1.5.25 pe o tijă orizontală aspră, coeficientul de frecare fiind $\mu = \mathrm{tg}\varphi$. Pentru echilibrul la limită al inelelor pe tijă, să se determine distanța d dintre ele, săgeata maximă h a firului, efortul minim T_0 şi eforturile la capete ale firului.

Răspunsuri

$$d = \ell\mu \ln\left(\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)\ , \qquad h = \frac{\ell\left(1-\sin\varphi\right)}{2\cos\varphi}\ , \qquad T_0 = \frac{\mu G}{2}\ , \qquad T_A = T_B = \frac{G}{2\cos\varphi}\ .$$

2.1. Cinematica punctului material

2.1.1. Legea de mişcare a unui punct material în coordonate carteziene este dată prin:

$$x = 5r\cos\lambda t^2 \ , \quad y = 4r\left(1+\sin\lambda t^2\right) \ , \quad z = 3r\left(1-\sin\lambda t^2\right) \ ,$$

unde r şi λ sunt constante pozitive. Să se determine traiectoria, viteza, acceleraţia, vitezele areolare faţă de originea axelor de coordonate şi faţă de punctul $C(0,\,4r,\,3r)$ în mişcarea dată a punctului material, precum şi raza de curbură a traiectoriei sale.

Rezolvare

Prin eliminarea timpului din legea de mişcare a punctului material, se obţin ecuaţiile analitice ale traiectoriei sale:

$$3y+4z=24r \ ,$$

$$x^2+(y-4r)^2+(z-3r)^2=25r^2 \ ,$$

care este cercul cu centrul în C şi de rază $R = 5r$, situat într-un plan paralel cu axa Ox, ce intersectează planul Oyz după diametrul său AB, extremităţile acestui diametru având coordonatele $A(0,\,8r,\,0)$, respectiv $B(0,\,0,\,6r)$.

Pentru determinarea vitezei punctului material la un moment t al mişcării sale, se calculează proiecţiile vitezei pe axele de coordonate:

$$v_x=\dot{x}=-10tr\lambda\sin\lambda t^2 \ , \quad v_y=\dot{y}=8tr\lambda\cos\lambda t^2 \ , \quad v_z=\dot{z}=-6tr\lambda\cos\lambda t^2 \ ,$$

de unde se obţine valoarea absolută a vitezei:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=2tr\lambda\sqrt{25\sin^2\lambda t^2+16\cos^2\lambda t^2+9\cos^2\lambda t^2}=10tr\lambda \ .$$

Direcţia şi sensul vitezei punctului material se pot determina uşor, calculând cosinuşii directori ai direcţiei sale faţă de axele de coordonate, dar în mişcarea circulară a unui punct material este mai importantă raportarea lor la sistemul de

referință intrinsec al traiectoriei sale, cu originea în poziția sa curentă $P(x, y, z)$. Față de acest sistem de referință se poate scrie:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = R\omega\vec{\tau} \ , \quad \vec{\omega} = \omega\vec{b} \ , \quad \vec{\rho} = \overline{CP} = \vec{r} - \vec{r}_C = -R\vec{n} \ ,$$

unde $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ sunt versorii tangentei, normalei principale şi binormalei, astfel încât rezultă:

$$\vec{\rho} = 5r\cos\lambda t^2\vec{i} + 4r\sin\lambda t^2\vec{j} - 3r\sin\lambda t^2\vec{k} \ , \quad \omega = \frac{v}{R} = 2\lambda t \ ,$$

$$\vec{\tau} = -\sin\lambda t^2\vec{i} + \frac{4}{5}\cos\lambda t^2\vec{j} - \frac{3}{5}\cos\lambda t^2\vec{k} \ ,$$

$$\vec{n} = -\cos\lambda t^2\vec{i} - \frac{4}{5}\sin\lambda t^2\vec{j} + \frac{3}{5}\sin\lambda t^2\vec{k} \ ,$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n} = \frac{3}{5}\left(\cos^2\lambda t^2 + \sin^2\lambda t^2\right)\vec{j} + \frac{4}{5}\left(\sin^2\lambda t^2 + \cos^2\lambda t^2\right)\vec{k} = \frac{1}{5}\left(3\vec{j} + 4\vec{k}\right) \ .$$

Se observă că vectorul unitar al binormalei, după care este dirijat vectorul viteză unghiulară în mişcarea circulară a punctului material, are direcția normalei la planul traiectoriei sale.

Pentru determinarea acceleraţiei punctului material, se prezintă în continuare două metode.

Metoda I. Se calculează proiecțiile pe axele de coordonate ale acceleraţiei, utilizând sistemul de referință Oxyz:

$$a_x = \dot{v}_x = -10r\lambda\sin\lambda t^2 - 20t^2r\lambda^2\cos\lambda t^2 \ ,$$
$$a_y = \dot{v}_y = 8r\lambda\cos\lambda t^2 - 16t^2r\lambda^2\sin\lambda t^2 \ ,$$
$$a_z = \dot{v}_z = -6r\lambda\cos\lambda t^2 + 12t^2r\lambda^2\sin\lambda t^2 \ ,$$

de unde se obține valoarea absolută a acceleraţiei:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 10r\lambda\sqrt{1 + 4t^4\lambda^2} \ .$$

Dacă se calculează cosinuşii directori ai direcției acceleraţiei față de axele acestui sistem de referință, se obțin expresii complicate, din care nu se determină uşor direcția şi sensul acceleraţiei în poziția curentă a punctului material pe traiectorie. De aici rezultă că este mai util să se determine direcția şi sensul acceleraţiei punctului material față de raza curentă $\vec{\rho}$ şi față de viteza sa $\vec{v}$, deci în raport cu normala principală, respectiv cu tangenta la traiectorie în poziția sa curentă. Notând cu φ unghiul dintre acceleraţie şi normala principală, măsurat în planul traiectoriei, se pot exprima relațiile:

$$\cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{\rho}}{aR}=-\frac{2t^2\lambda}{\sqrt{1+4t^4\lambda^2}}\ ,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{av}=\frac{1}{\sqrt{1+4t^4\lambda^2}}\ ,$$

astfel încât se obține:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{2t^2\lambda}\ ,\qquad \varphi=\mathrm{arctg}\frac{1}{2t^2\lambda}\ ,$$

de unde se determină mai uşor direcția şi sensul acceleraţiei punctului material în orice moment al mişcării sale.

<u>Metoda II.</u> În coordonate intrinseci rezultă imediat:

$$\vec{\varepsilon}=\varepsilon\vec{b}\ ,\qquad \varepsilon=\dot{\omega}=2\lambda\ ,$$
$$a_\tau=\varepsilon R=10r\lambda\ ,\qquad a_n=\omega^2R=20t^2r\lambda^2\ ,$$
$$a=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}=10r\lambda\sqrt{1+4t^4\lambda^2}\ ,$$
$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\varepsilon}{\omega^2}=\frac{1}{2t^2\lambda}\ ,$$

deci mişcarea circulară a punctului material este uniform accelerată, având acceleraţia unghiulară constantă $\vec{\varepsilon}=2\lambda\vec{b}$.

Pentru determinarea vitezelor areolare cerute în enunț, se calculează în primul rând viteza areolară față de C:

$$\vec{\Omega}_C=\frac{1}{2}\vec{\rho}\times\vec{v}=\frac{1}{2}R^2\omega\vec{b}=5tr^2\lambda\left(3\vec{j}+4\vec{k}\right)\ ,$$

după care se obține uşor viteza areolară față de O:

$$\vec{\Omega}_O=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{r}_C\times\vec{v}+\vec{\Omega}_C=-12tr^2\lambda\cos\lambda t^2\vec{i}+15tr^2\lambda\left(1-\sin\lambda t^2\right)\vec{j}+$$
$$+20tr^2\lambda\left(1+\sin\lambda t^2\right)\vec{k}\ .$$

Ştiind că mişcarea punctului material este circulară, este evident că raza de curbură a traiectoriei sale este constantă şi egală cu raza $R = 5r$ a cercului. Dacă nu se observă că mişcarea sa este circulară, se poate determina raza de curbură a traiectoriei sale cunoscând valorile absolute ale vitezei şi acceleraţiei, calculate în urma studiului mişcării în coordonate carteziene. Într-adevăr, cu aceste valori cunoscute, se obține succesiv:

$$a_\tau=\dot{v}=10r\lambda\ ,$$
$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=20t^2r\lambda^2\ ,$$
$$R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{100t^2r^2\lambda^2}{20t^2r\lambda^2}=5r\ .$$

2.1.2. Se dă legea de mişcare în mişcarea plană a unui punct material prin coordonatele carteziene:

$$x = 2r\cos\lambda t \ , \quad y = r\cos 3\lambda t$$

exprimate ca funcţii de timp, unde r şi λ sunt constante pozitive.

a) Să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului material, precum şi raza de curbură a traiectoriei sale, exprimată în funcţie de timp şi apoi în funcţie de abscisa adimensională $\xi = x/r$.

b) Să se calculeze valorile extreme ale vitezei punctului material şi apoi să se determine poziţiile şi acceleraţiile sale la momentele în care viteza sa are valori extreme. Cum se explică poziţiile acestor acceleraţii faţă de traiectorie?

c) Să se arate că mişcarea punctului material este periodică şi apoi să se determine poziţiile P_i pe traiectorie, vitezele $\vec{v}_i$ şi acceleraţiile $\vec{a}_i$ la momentele t_i corespunzătoare unei perioade a mişcării, pentru care $t_0 = 0$, $t_1 = \pi/3\lambda$, $t_2 = \pi/2\lambda$, $t_3 = 2\pi/3\lambda$, $t_4 = \pi/\lambda$, $t_{i+4} = t_i + \pi/\lambda$.

Rezolvare

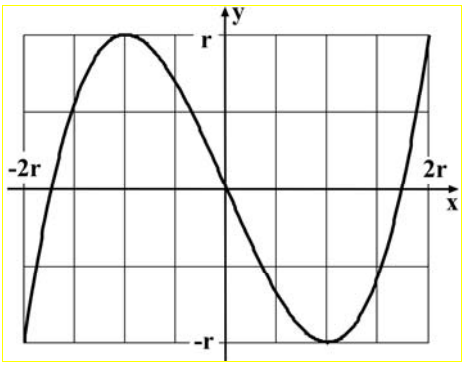


Fig. 2.1.2

a) Pe baza relaţiei cunoscute:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \ ,$$

se poate elimina uşor timpul din legea mişcării, astfel încât rezultă:

$$y = \frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{r^2} - 3\right) \ ,$$

$$-2r \le x \le 2r \ ,$$

deoarece $|\cos\lambda t| \le 1$. Prin urmare, traiectoria punctului material este un arc de parabolă cubică, situat în interiorul dreptunghiului determinat de dreptele de ecuaţii $x = \pm 2r$ şi $y = \pm r$, aşa cum este reprezentată în fig. 2.1.2.

Pentru determinarea vitezei şi acceleraţiei punctului material, se calculează proiecţiile acestora pe axele de coordonate:

$$v_x = -2r\lambda\sin\lambda t \ , \quad v_y = -3r\lambda\sin 3\lambda t \ ,$$

$$a_x = -2r\lambda^2\cos\lambda t \ , \quad a_y = -9r\lambda^2\cos 3\lambda t \ ,$$

de unde rezultă:

$$v = r\lambda\sqrt{4\sin^2\lambda t + 9\sin^2 3\lambda t} \ , \quad a = r\lambda^2\sqrt{4\cos^2\lambda t + 81\cos^2 3\lambda t} \ .$$

Cunoscând valorile absolute ale vitezei şi acceleraţiei puntului material, exprimate ca funcţii de timp, pentru raza de curbură a traiectoriei se obţine succesiv:

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{r\lambda^2\left(4\sin\lambda t\cos\lambda t + 27\sin 3\lambda t\cos 3\lambda t\right)}{\sqrt{4\sin^2\lambda t + 9\sin^2 3\lambda t}} ,$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{12r\lambda^2\left(1-\cos 2\lambda t\right)\left|\sin 2\lambda t\right|}{\sqrt{4\sin^2\lambda t + 9\sin^2 3\lambda t}} = \frac{48r\lambda^2\sin^2\lambda t\left|\cos\lambda t\right|}{\sqrt{4+9\left(4\cos^2\lambda t-1\right)^2}} ,$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{r}{48}\frac{\left(4+9\left(4\cos^2\lambda t-1\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\cos\lambda t\right|} = \frac{r}{24}\frac{\left(4+9\left(\xi^2-1\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\xi\right|} .$$

b) Din condiţia de extrem a vitezei, $\dot{v} = 0$, rezultă succesiv:

$$\sin\lambda t\cos\lambda t = 0 , \quad \sin 2\lambda t = 0 ,$$

$$2\lambda t_k = k\pi , \quad t_k = \frac{k\pi}{2\lambda} , \quad k \in N .$$

Pentru $k = 4n$, $n \in N$, punctul material se află în poziţia P_0 din fig. 2.1.2 cu viteza minimă nulă şi are acceleraţia tangentă la traiectorie, de valoare maximă $a_0 = \sqrt{85}r\lambda^2$. Pentru $k = 4n+1$, punctul material se va găsi în poziţia P_2, având viteza tangentă la traiectorie de valoare maximă $v_2 = \sqrt{13}r\lambda$ şi acceleraţia minimă nulă. Pentru $k = 4n+2$, acesta se află în poziţia P_4 cu viteza nulă şi cu acceleraţia maximă tangentă la traiectorie, iar pentru $k = 4n+3$ el ajunge din nou în P_2 cu şi acceleraţia nulă şi viteza maximă tangentă la traiectorie, dar având sensul contrar faţă de viteza $\vec{v}_2$ din figură. Se mai pot determina nişte valori de extrem intermediar pentru viteza punctului din condiţia $\dot{v} = 0$, pentru care avem:

$$4 + 27\left(4\cos^2\lambda t - 1\right)\left(4\cos^2\lambda t - 3\right) = 0 ,$$

din care rezultă:

$$\cos 4\lambda t = -\frac{31}{54} ,$$

$$t_j = \frac{j\pi}{2\lambda} \pm \frac{1}{4\lambda}\arccos\left(-\frac{31}{54}\right) , \quad j \in N .$$

În poziţiile corespunzătoare acestor momente, acceleraţia punctului material va fi normală la traiectorie, deoarece acceleraţia sa tangenţială $a_\tau = \dot{v}$ este nulă. În poziţiile P_0 şi P_4, acceleraţia sa normală este nulă, deoarece în aceste poziţii viteza sa are valoarea minimă nulă, iar acceleraţia sa tangenţială este diferită de zero, deoarece variaţia în timp a vitezei sale va fi nenulă, în aceste poziţii punctul

material schimbându-şi sensul de mişcare pe traiectorie. Într-adevăr, de exemplu în P_0 se obține:

$$a_0 = \lim_{\substack{t\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \lim_{t\to 0} \frac{r\lambda^2 \cos\lambda t\left(4+27\left(4\cos^2\lambda t-1\right)\left(4\cos^2\lambda t-3\right)\right)}{\sqrt{4+9\left(4\cos^2\lambda t-1\right)^2}} = \sqrt{85}r\lambda^2$$

.

La momentele în care punctul material trece prin P_2, accelerația sa este nulă, adică ambele componente ale accelerației sale în coordonate intrinseci sunt nule, deoarece:

$$v_2 = v_{max}\ , \quad \dot{v}_2 = 0\ ,$$
$$a_\tau(P_2) = 0\ , \quad R_c(P_2) \to \infty\ , \quad a_n(P_2) = 0\ .$$

c) Din analiza variației vitezei punctului material, efectuată la punctul precedent, rezultă că mişcarea sa este periodică cu perioada $T = 2\pi/\lambda$, aceeaşi cu perioada de variație a abscisei x şi a proiecțiilor pe axa Ox ale vitezei şi accelerației sale, care este de 3 ori mai mare decât perioada $2\pi/3\lambda$ de variație a ordonatei y, respectiv a proiecțiilor pe această axă ale vitezei şi accelerației sale. De asemenea, la punctul precedent s-au determinat pozițiile sale P_i pe traiectorie, valorile v_i şi a_i ale vitezei şi accelerației sale la momentele t_i corespunzătoare indicelui i par, precum şi pozițiile acestor vectori față de traiectorie. Mai rămâne să se determine aceste elemente ale mişcării punctului material la momentele t_i pentru indicele i impar, pentru care se observă că $\sin 3\lambda t_i = 0$, deci $\cos 3\lambda t_i = \pm 1$. Ca urmare, la aceste momente punctul material se va găsi în poziția $P_1(r,-r)$ sau $P_3(-r,r)$ cu viteza paralelă cu axa Ox de valoare $v_1 = v_3 = v_5 = v_7 = \sqrt{3}r\lambda$, iar valorile corespunzătoare ale accelerației sale se pot calcula după cum urmează:

$$t_1 = \frac{\pi}{3\lambda}\ , \qquad a_x(t_1) = -r\lambda^2\ , \qquad a_y(t_1) = 9r\lambda^2\ ,$$
$$t_3 = \frac{2\pi}{3\lambda}\ , \qquad a_x(t_3) = r\lambda^2\ , \qquad a_y(t_3) = -9r\lambda^2\ ,$$
$$t_5 = \frac{4\pi}{3\lambda}\ , \qquad a_x(t_5) = r\lambda^2\ , \qquad a_y(t_5) = -9r\lambda^2\ ,$$
$$t_7 = \frac{5\pi}{3\lambda}\ , \qquad a_x(t_7) = -r\lambda^2\ , \qquad a_y(t_7) = 9r\lambda^2\ ,$$

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \sqrt{82}r\lambda^2\ .$$

Având calculate proiecțiile pe axele de coordonate ale accelerației punctului material în pozițiile sale $P_1 \equiv P_7$ şi $P_3 \equiv P_5$, se poate determina uşor orientarea vectorilor corespunzători ai accelerației, atât față de sistemul de referință Oxy, cât şi față de traiectorie.

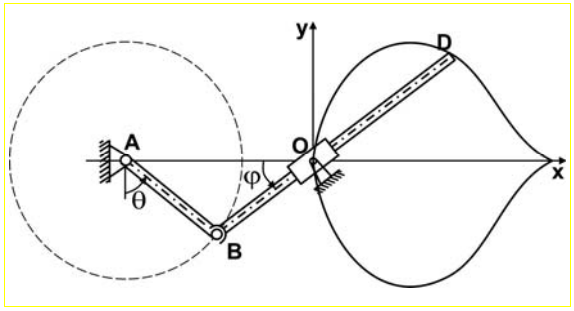


Fig. 2.1.3

2.1.3. Mecanismul din fig. 2.1.3, format din manivela AB de lungime R şi bara BD de lungime 4R, articulate între ele în B, se mişcă în planul Oxy astfel încât manivela se roteşte în jurul articulaţiei fixe A după legea $\theta = \lambda t$, unde λ este o constantă pozitivă dată, iar bara trece printr-un manşon articulat în O la distanţa $AO = 2R$, măsurată pe axa Ox. Ştiind că unghiul θ este măsurat între direcţia negativă a axei Oy şi manivelă, să se determine:

a) legea mişcării capătului D al barei şi ecuaţia traiectoriei sale în coordonate polare;

b) componentele radiale şi transversale, precum şi valorile absolute ale vitezei şi acceleraţiei punctului D la momentele $t_k = k\pi/6\lambda$, $k \in N$, corespunzătoare unei rotaţii complete a manivelei.

Rezolvare

a) Coordonatele polare ale punctului D vor fi raza vectoare $r = OD$ şi unghiul polar ν dintre bară şi axa Ox. Pentru exprimarea lor ca funcţii de timp, se pot scrie relaţiile:

$$OB\sin\varphi = R\cos\theta \ ,$$
$$OB\cos\varphi + R\sin\theta = 2R \ ,$$

din care rezultă:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\cos\theta}{2-\sin\theta} \ ,$$
$$OB = R\sqrt{5-4\sin\theta} \ ,$$

astfel încât legea mişcării punctului D în coordonate polare va fi:

$$\begin{cases} r = R\left(4-\sqrt{5-4\sin\lambda t}\right) \ , & R \le r \le 3R \ , \\ \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\cos\lambda t}{2-\sin\lambda t} \ , & -\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6} \ . \end{cases}$$

Pentru eliminarea timpului din această lege de mişcare, în primul rând se exprimă în funcţie de timp $\cos\varphi$, care este strict pozitiv, după care se poate determina $\sin\lambda t$ ca funcţie de φ. Prin urmare, ecuaţia traiectoriei punctului D în coordonate polare se obţine din următoarele calcule succesive:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{2-\sin\lambda t}{\sqrt{5-4\sin\lambda t}} \ ,$$

$$\sin^2\lambda t - 4\sin^2\varphi\sin\lambda t + 4\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = 0 \ ,$$

$$\sin\lambda t = 2\sin^2\varphi \pm \cos\varphi\sqrt{1-4\sin^2\varphi} \ ,$$

$$r = R\left(4 - \sqrt{8\cos^2\varphi - 3 \mp 4\cos\varphi\sqrt{4\cos^2\varphi - 3}}\right) \ ,$$

unde toate expresiile de sub radicali sunt pozitive pentru ν cuprins între $-\pi/6$ şi $\pi/6$. În fig. 2.1.3 s-a reprezentat şi această traiectorie pe baza ecuației sale în coordonate polare, care este exprimată de ultima relație din cele de mai sus.

b) Pentru determinarea elementelor mişcării cerute în enunț, este necesar ca, în primul rând, să se calculeze prima şi a doua derivată în raport cu timpul pentru coordonatele polare r şi ν , care sunt:

$$\dot r = \frac{2R\lambda\cos\lambda t}{\sqrt{5-4\sin\lambda t}} \ , \qquad \ddot r = \frac{2R\lambda^2(2-\sin\lambda t)(1-2\sin\lambda t)}{(5-4\sin\lambda t)^{3/2}} \ ,$$

$$\dot\varphi = \frac{\lambda(1-2\sin\lambda t)}{5-4\sin\lambda t} \ , \qquad \ddot\varphi = -6\lambda^2\frac{\cos\lambda t}{(5-4\sin\lambda t)^2} \ ,$$

după care rezultă:

$$v_r = \dot r \ , \qquad v_\varphi = r\dot\varphi \ , \qquad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} \ ,$$

$$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 \ , \qquad a_\varphi = 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi \ , \qquad a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} \ .$$

Valorile acestor elemente ale mişcării punctului D la momentele date în enunț, pentru o rotație completă a manivelei, sunt calculate în tabelul de mai jos.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r/R	1,76	2,27	2,76	3,00	2,76	2,27	1,76	1,35	1,09	1,00	1,09	1,35
$v_r/R\lambda$	0,9	1,0	0,8	0,0	-0,8	-1,0	-0,9	-0,7	-0,3	0,0	0,3	0,7
$v_\varphi/R\lambda$	0,35	0,0	-1,3	-3,0	-1,3	0,0	0,35	0,4	0,35	0,33	0,35	0,4
$v/R\lambda$	0,96	1,00	1,54	3,00	1,54	1,00	0,96	0,76	0,49	0,33	0,49	0,76
$a_r/R\lambda^2$	0,28	0,0	-1,5	-5,0	-1,5	0,0	0,28	0,43	0,52	0,55	0,52	0,43
$a_\varphi/R\lambda^2$	-0,1	-1,3	-4,3	0,0	4,27	1,30	0,07	-0,2	-0,2	0,0	0,18	0,23
$a/R\lambda^2$	0,30	1,30	4,53	5,00	4,53	1,30	0,30	0,49	0,55	0,55	0,55	0,49

Se observă că punctul considerat se mişcă în acelaşi sens pe traiectoria sa, care este o curbă plană închisă, simetrică față de axa Ox. Ca urmare, mişcarea sa va fi periodică, având perioada $T = 2\pi/\lambda$ egală cu intervalul de timp necesar unei rotații complete a manivelei. Se observă, de asemenea, că viteza punctului D nu se

anulează, având valori extreme în pozițiile sale în care raza vectoare r are valori extreme şi $\varphi = 0$, adică:

$$r_{max} = 3R \ , \quad v_{max} = 3R\lambda \ ,$$

$$r_{min} = R \ , \quad v_{min} = \frac{R\lambda}{3} \ .$$

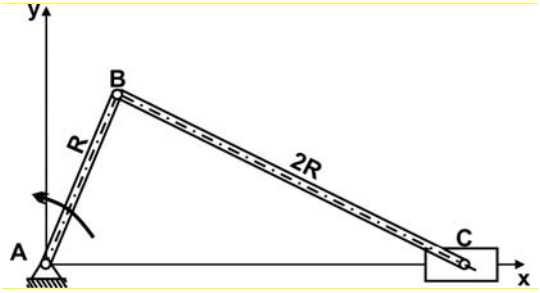


Fig. 2.1.4.1)

2.1.4. Mecanismul bielă-manivelă excentric din fig. 2.1.4.1), format din manivela AB de lungime R şi biela BC de lungime 2R, articulate între ele în B, se mişcă în planul Oxy astfel încât manivela se roteşte în jurul articulației fixe $A(0, R)$ după legea $\theta = 2\lambda t$, unde λ este o constantă pozitivă dată, iar culisorul C, articulat la celălalt capăt al bielei, se mişcă pe axa Ox.

a) Să se determine legea de mişcare şi legea de variație a vitezei culisorului.

b) Să se traseze diagramele legii de mişcare şi vitezei culisorului, reprezentând grafic abscisa sa adimensională x/R şi viteza sa adimensională $v/\lambda R$ ca funcții de unghiul θ dintre manivelă şi direcția negativă a axei Oy care este dat proporțional cu timpul.

c) Să se determine valorile extreme ale vitezei culisorului, valorile unghiului θ şi momentele la care viteza sa atinge aceste valori extreme.

Rezolvare

a) Se notează cu B′ proiecția punctului B pe axa Ox şi cu φ unghiul dintre bielă şi aceeaşi axă. Pe baza fig. 2.1.4.1) se pot exprima relațiile geometrice şi trigonometrice:

$$OB = 2R\sin\frac{\theta}{2} \ , \quad BB' = OB\sin\frac{\theta}{2} = 2R\sin^2\frac{\theta}{2} = 2R\sin\varphi \ ,$$

$$\sin\varphi = \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\theta\right) \ ,$$

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1+\cos\theta\right)+\sin^2\theta} \ ,$$

astfel încât legea mişcării rectilinii a culisorului se determină din condiția:

$$x = AB\sin\theta - BC\cos\varphi = R\sin\theta - 2R\cos\varphi \ ,$$

din care rezultă:

$$x = \begin{cases} R\left(\sin 2\lambda t - \sqrt{2\left(1+\cos 2\lambda t\right) + \sin^2 2\lambda t}\right), & t \in \left[kT,\, t_1 + kT\right] \cup \left[t_3 + kT,\, (k+1)T\right] \\ R\left(\sin 2\lambda t + \sqrt{2\left(1+\cos 2\lambda t\right) + \sin^2 2\lambda t}\right), & t \in \left[t_1 + kT,\, t_3 + kT\right], \end{cases}$$

unde $k \in N$, $t_1 = \pi/2\lambda$, $t_3 = 3\pi/2\lambda$, iar $T = 2\pi/\lambda$ este perioada mişcării sale, corespunzând la două rotaţii complete ale manivelei. Prin derivarea acestei expresii în raport cu timpul, se obţine legea de variaţie a vitezei culisorului:

$$x = \begin{cases} 2\lambda R\left(\cos 2\lambda t + \dfrac{\sin 2\lambda t\left(1-\cos 2\lambda t\right)}{\sqrt{2\left(1+\cos 2\lambda t\right) + \sin^2 2\lambda t}}\right), & t \in \left[kT, t_1 + kT\right] \cup \left[t_3 + kT, (k+1)T\right] \\ 2\lambda R\left(\cos 2\lambda t - \dfrac{\sin 2\lambda t\left(1-\cos 2\lambda t\right)}{\sqrt{2\left(1+\cos 2\lambda t\right) + \sin^2 2\lambda t}}\right), & t \in \left[t_1 + kT, t_3 + kT\right]. \end{cases}$$

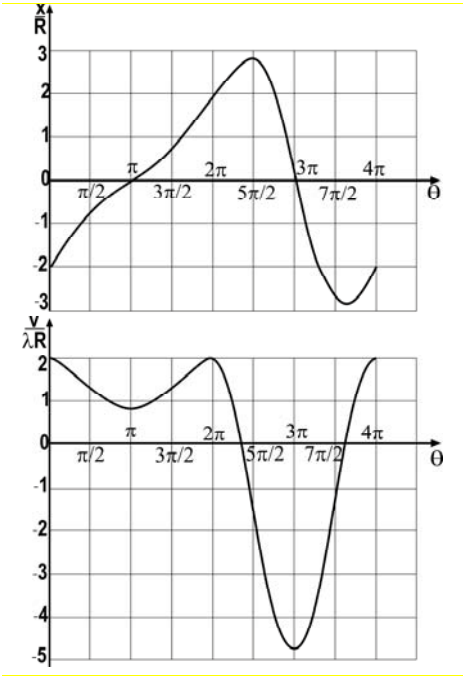


Fig. 2.1.4.2)

b) Diagramele cerute în enunţ sunt reprezentate în fig. 2.1.4.2) pe baza expresiilor determinate la punctul precedent pentru legea de mişcare şi legea de variaţie a vitezei culisorului. Mişcarea sa fiind periodică, aceste diagrame s-au reprezentat numai pentru o perioadă a mişcării, după care se repetă atât variaţia abscisei x a culisorului, cât şi cea a vitezei sale. Se observă că aceste diagrame sunt continue la momentele $t_1 + kT$ şi $t_3 + kT$, la care le corespund unghiurile de rotaţie ale manivelei $\theta_1 + 4k\pi$, respectiv $\theta_3 + 4k\pi$, unde $\theta_1 = \pi$ şi $\theta_3 = 3\pi$. De asemenea, se observă că aceste diagrame verifică proprietăţile diagramelor mişcărilor rectilinii ale punctului material, deoarece elongaţia x creşte în intervalele de timp în care viteza este pozitivă, scade în intervalele de timp în care aceasta devine negativă, iar la momentele

$t' + kT$ şi $t'' + kT$, la care le corespund unghiurile $\theta' + 4k\pi$, respectiv $\theta'' + 4k\pi$, când viteza se anulează, se ating valorile extreme ale elongației, care sunt:

$$\theta' = 2\pi + \arccos\frac{1}{3}\ , \qquad x_{max} = x(\theta') = 2\sqrt{2}R\ ,$$
$$\theta'' = 4\pi - \arccos\frac{1}{3}\ , \qquad x_{min} = x(\theta'') = -2\sqrt{2}R\ .$$

c) Din diagrama vitezei culisorului se obține imediat:

$$v_{max} = 2\lambda R\ , \qquad t = \frac{k\pi}{\lambda}\ , \qquad \theta = 2k\pi\ ,$$
$$v_{ei} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\lambda R = 0{,}83\lambda R\ , \qquad t = t_1 + kT\ , \qquad \theta = (4k+1)\pi\ ,$$
$$v_{min} = -2\left(\sqrt{2}+1\right)\lambda R = -4{,}83\lambda R\ , \qquad t = t_3 + kT\ , \qquad \theta = (4k+3)\pi\ ,$$

unde v_{ei} reprezintă valoarea de extrem intermediar a vitezei. Aceleaşi puncte de extrem din diagrama vitezei se pot determina pe baza legii de variație în timp a acceleraţiei culisorului, care are expresia în funcție de $\theta = 2\lambda t$ dată de:

$$a = \begin{cases} -4\lambda^2 R\sin\theta\left(1 - \dfrac{\sin\theta(4-\cos\theta)}{\sqrt{(1+\cos\theta)(3-\cos\theta)^3}}\right), & \theta \in [4k\pi, (4k+1)\pi] \cup [(4k+3)\pi, 4(k+1)\pi] \\ -4\lambda^2 R\sin\theta\left(1 + \dfrac{\sin\theta(4-\cos\theta)}{\sqrt{(1+\cos\theta)(3-\cos\theta)^3}}\right), & \theta \in [(4k+1)\pi, 4(k+3)\pi]\ . \end{cases}$$

2.1.5. Un punct material se mişcă uniform cu viteza v_0 dată pe elicea cilindrică de ecuații parametrice:

$$x = R\cos\theta\ , \qquad y = R\sin\theta\ , \qquad z = R\theta\,\mathrm{tg}\alpha\ ,$$

exprimate în coordonate carteziene, unde raza R a cilindrului de înfăşurare al elicei cilindrice şi unghiul său de pantă $\alpha < \pi/4$ sunt cunoscute. Ştiind că la momentul inițial $t_0 = 0$ al mişcării $\theta = 0$ şi $\dot{\theta} > 0$, să se determine legea mişcării, viteza areolară şi acceleraţia punctului material la un moment t al mişcării sale, precum şi raza de curbură a traiectoriei sale, studiind mişcarea sa:

a) în coordonate carteziene;
b) în coordonate cilindrice.

Răspunsuri

a) $x = R\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\cos\alpha\right)$, $y = R\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\cos\alpha\right)$, $z = v_0 t\sin\alpha$;

b) $\rho = R$, $\theta = \frac{v_0 t}{R}\cos\alpha$, $z = v_0 t\sin\alpha$;

$\Omega = \frac{Rv_0}{2}\sqrt{1+\left(\frac{v_0 t}{2R}\sin 2\alpha\right)^2}$, $a = \frac{v_0^2}{R}\cos^2\alpha$, $R_c = \frac{R}{\cos^2\alpha}$.

2.1.6. Mişcarea unui punct material pe traiectoria sa cunoscută este dată prin legea orară:

$$s(t) = \pi t + 12\cos\frac{\pi t}{6} \quad [\mathrm{m}] ,$$

unde timpul t se exprimă în secunde.

a) Să se determine poziția punctului material pe traiectorie la momentul $t_f = 15$ s şi să se calculeze lungimea drumului parcurs de el de la momentul inițial $t_0 = 0$ până la momentul t_f .

b) Dacă traiectoria punctului material este elicea cilindrică de rază $R = \pi^2/10$ m şi unghi de pantă $\alpha = \pi/6$, să se determine valorile vitezei şi acceleraţiei sale la momentul t_f .

Răspunsuri

a) $s_f = s(t_f) = 15\pi = 47{,}1$ m ,

$\ell = |s_1 - s_0| + |s_2 - s_1| + |s_3 - s_2| + |s_f - s_3| = 59{,}78$m ,

$s_{k+1} = s(t_{k+1})$, $t_{k+1} = (-1)^k + 6k$, $k = 0, 1, 2$.

b) $v = \pi = 3{,}14$ m/s , $a_\tau = 0$, $a_n = a = \frac{v^2}{R_c} = \frac{v^2}{R}\cos^2\alpha = 7{,}5$ m/s^2 .

2.1.7. Se dă legea mişcării plane a unui punct material în coordonate carteziene prin funcţiile de timp:

$$x = 2r\sin\lambda t \ , \quad y = r\cos^2\lambda t \ ,$$

în care r şi λ sunt constante pozitive.

a) Să se determine traiectoria, viteza, viteza areolară, acceleraţia şi raza de curbură a traiectoriei în funcţie de timp şi în funcţie de abscisa x, în mişcarea considerată a punctului material.

b) La ce momente şi în care poziţii pe traiectorie, viteza punctului material are valori extreme? Să se calculeze aceste valori extreme ale vitezei sale.

c) Să se determine acceleraţia punctului material şi direcţia acceleraţiei faţă de traiectorie în poziţiile în care viteza sa are valori extreme. Cum se explică aceste rezultate?

Răspunsuri

a) $y = r - \dfrac{x^2}{4r}$, $-2r \le x \le 2r$, $0 \le y \le r$, $v = 2\lambda r\left|\cos\lambda t\right|\sqrt{1+\sin^2\lambda t}$, $\vec{\Omega} = -\lambda r^2\cos\lambda t\left(1+\sin^2\lambda t\right)\vec{k}$, $a = 2\lambda^2 r\sqrt{\sin^2\lambda t + \cos^2 2\lambda t}$,

$R_C = 2r\left(1+\sin^2\lambda t\right)^{3/2} = 2r\left(1+\dfrac{x^2}{4r^2}\right)^{3/2}$.

b) $t_k = \dfrac{k\pi}{2\lambda}$, $k \in N$; $P_0(0, r)$, $v_{max} = 2\lambda r$; $P_1(2r, 0)$, $P_3(-2r, 0)$, $v_{min} = 0$.

c) $a_0 = a_n = 2\lambda^2 r$, $a_1 = a_3 = a_\tau = 2\sqrt{2}\lambda^2 r$.

2.1.8. Un inel se mişcă pe parabola din sârmă de ecuaţie $y^2 = 2px$ faţă de sistemul de referinţă plan Oxy, astfel încât acceleraţia sa este paralelă cu axa Ox tot timpul mişcării sale. Ştiind că la momentul iniţial $t_0 = 0$ al mişcării sunt date $y = 0$ şi $\dot{y} = v_0 > 0$, să se determine legea de mişcare, viteza şi acceleraţia inelului şi să se exprime raza de curbură a traiectoriei sale în funcţie de timp şi de coordonatele sale carteziene.

Răspunsuri

$$x=\frac{v_0^2t^2}{2p}\ ,\quad y=v_0t\ ;\quad v=\frac{v_0}{p}\sqrt{p^2+v_0^2t^2}\ ;\quad a=\frac{v_0^2}{p}\ ;$$

$$R_C=p\left(1+\frac{v_0^2t^2}{p^2}\right)^{3/2}=p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{3/2}=p\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{3/2}\ .$$

2.1.9. Un inel se mişcă pe parabola din sârmă de ecuaţie $y^2=2px$ faţă de sistemul de referinţă plan Oxy, astfel încât acceleraţia sa are valoarea constantă a_0 şi este paralelă cu axa Ox tot timpul mişcării sale. Ştiind că la momentul iniţial $t_0=0$ al mişcării sale sunt date $y=0$ şi $\dot{y}>0$, să se determine legea mişcării în coordonate carteziene, viteza şi viteza areolară a inelului şi să se exprime raza de curbură a traiectoriei sale în funcţie de timp şi în funcţie de coordonatele sale.

Răspunsuri

$$x=\frac{a_0t^2}{2}\ ,\quad y=t\sqrt{pa_0}\ ,\quad v=\sqrt{a_0\left(p+a_0t^2\right)}\ ,\quad \vec{\Omega}=-\frac{a_0t^2}{4}\sqrt{pa_0}\vec{k}\ ;$$

$$R_c=p\left(1+\frac{a_0t^2}{p}\right)^{3/2}=p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{3/2}=p\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{3/2}\ .$$

2.1.10. Un inel se mişcă pe lănţişorul din sârmă de ecuaţie $y=d\,ch\left(x/d\right)$ faţă de sistemul de referinţă plan Oxy, astfel încât acceleraţia sa este paralelă cu axa Oy tot timpul mişcării sale. Ştiind că la momentul iniţial $t_0=0$ al mişcării sunt date $x=0$ şi $\dot{x}=v_0>0$, să se determine legea de mişcare, viteza şi acceleraţia inelului şi să se exprime raza de curbură a traiectoriei sale în funcţie de timp şi în funcţie de coordonatele sale carteziene.

Răspunsuri

$$x=v_0t\ ,\quad y=d\,ch\frac{v_0t}{d}\ ,\quad v=v_0\,ch\frac{v_0t}{d}\ ,\quad a=\frac{v_0^2}{d}ch\frac{v_0t}{d}\ ,$$

$$R_c=d\,ch^2\frac{v_0t}{d}=d\,ch^2\frac{x}{d}=\frac{y^2}{d}\ .$$

2.1.11. Un inel se mişcă pe lănţişorul din sârmă de ecuaţie $y=d\,ch\left(x/d\right)$ faţă de sistemul de referinţă plan Oxy, astfel încât acceleraţia sa este paralelă cu axa Oz şi valoarea acceleraţiei sale este proporţională cu ordonata sa y în orice moment

al mişcării sale, factorul de proporţionalitate fiind λ^2. Ştiind că la momentul iniţial $t_0 = 0$ al mişcării sale sunt date $x = 0$ şi $\dot{x} > 0$, să se determine legea mişcării în coordonate carteziene, viteza, viteza areolară şi acceleraţia inelului şi să se exprime raza de curbură a traiectoriei sale în funcţie de timp şi în funcţie de coordonatele sale.

Răspunsuri

$$x = \lambda d t\ , \quad y = d\,\mathrm{ch}\lambda t\ ; \quad v = \lambda d\,\mathrm{ch}\lambda t\ , \quad \vec{\Omega} = \frac{\lambda d^2}{2}\left(\lambda t\,\mathrm{sh}\lambda t - \mathrm{ch}\lambda t\right)\vec{k}\ ;$$

$$a = \lambda^2 d\,\mathrm{ch}\lambda t\ , \quad R_c = d\,\mathrm{ch}^2\lambda t = d\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{d} = \frac{y^2}{d}\ .$$

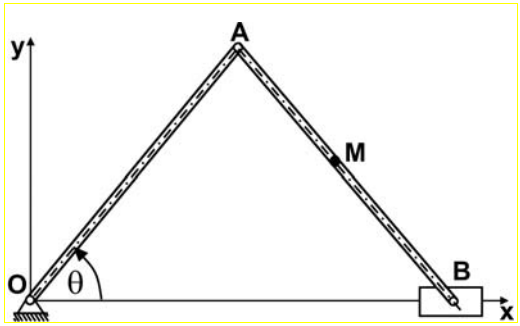


Fig. 2.1.12

2.1.12. Mecanismul bielă-manivelă din fig. 2.1.12, format din manivela OA de lungime 2ℓ şi biela AB de aceeaşi lungime, articulate între ele în A, se mişcă în planul Oxy astfel încât manivela se roteşte în jurul articulaţiei fixe O după legea $\theta = \lambda t$, unde λ este o constantă pozitivă dată, iar culisorul B, articulat la celălalt capăt al bielei, se mişcă pe axa Ox.

a) Pentru mijlocul M al bielei să se determine legea de mişcare în coordonate carteziene, traiectoria, viteza, acceleraţia, viteza areolară şi raza de curbură a traiectoriei.

b) La ce momente şi în care poziţii pe traiectorie, viteza punctului M are valori extreme? Să se calculeze aceste valori extreme ale vitezei sale.

c) Să se determine acceleraţia punctului M şi direcţia acesteia faţă de traiectorie în poziţiile în care viteza sa are valori extreme. Cum se explică aceste rezultate?

Răspunsuri

a) $x = 3\ell\cos\lambda t\ , \quad y = \ell\sin\lambda t\ ; \quad \frac{x^2}{9\ell^2} + \frac{y^2}{\ell^2} = 1\ , \quad v = \lambda\ell\sqrt{1 + 8\sin^2\lambda t}\ ;$

$$a = \lambda^2\ell\sqrt{1 + 8\cos^2\lambda t}\ ; \quad \Omega = \frac{3}{2}\lambda\ell^2\ ; \quad R_c = \frac{\ell}{3}\left(1 + 8\sin^2\lambda t\right)^{3/2}\ .$$

b) $t_k = \dfrac{k\pi}{2\lambda}$, $k \in N$; $M_0(3\ell,0)$, $M_2(-3\ell,0)$,

$v_0 = v_2 = v_{min} = \lambda\ell$, $M_1(0,\ell)$, $M_3(0,-\ell)$, $v_1 = v_3 = v_{max} = 3\lambda\ell$.

c) $a_0 = a_2 = a_n = a_{max} = 3\lambda^2\ell$; $a_1 = a_3 = a_n = a_{min} = \lambda^2\ell$; $a_\tau = \dot{v} = 0$.

2.1.13. Un disc circular cu centrul C şi de rază R se mişcă în planul Oxy, astfel încât se rostogoleşte fără alunecare pe axa Ox, iar centrul său se mişcă pe dreapta $y = R$ după legea $x_C = \lambda Rt$, unde λ este o constantă pozitivă dată.

a) Pentru punctul P de pe periferia discului, care la momentul iniţial $t_0 = 0$ se află în O, să se determine legea de mişcare în coordonate carteziene, traiectoria, viteza, acceleraţia şi raza de curbură a traiectoriei.

b) Notând cu I punctul de contact al discului cu axa Ox şi cu θ unghiul dintre razele sale CI şi CP, să se verifice relaţiile:

$$\vec{v} = -\dot{\theta}\vec{k} \times \overline{IP} \ , \quad \vec{a} = -\dot{\theta}^2 \overline{CP} \ , \quad R_c = 2IP \ .$$

Răspunsuri

a) $x = R(\lambda t - \sin\lambda t)$, $y = R(1 - \cos\lambda t)$.

Legea de mişcare a punctului P reprezintă şi ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sale, care este o cicloidă.

$$v = 2\lambda R\left|\sin\frac{\lambda t}{2}\right| \ , \quad a = \lambda^2 R \ , \quad R_c = 4R\left|\sin\frac{\lambda t}{2}\right| \ .$$

b) Deoarece $\theta = \lambda t$, se pot verifica imediat relaţiile din enunţ, calculând vectorii $\overline{IP}$ şi $\overline{CP}$ ca funcţii de θ .

2.1.14. Mecanismul din fig. 2.1.14, format din barele de lungimi $OF = \ell + b$, $ED = \ell$, $AB = b$ şi $FC = \ell + b$, articulate între ele ca în figură, unde patrulaterul EFBD reprezintă un romb de latură $\ell < b$, se mişcă în planul Oxy astfel încât manivela OF are o

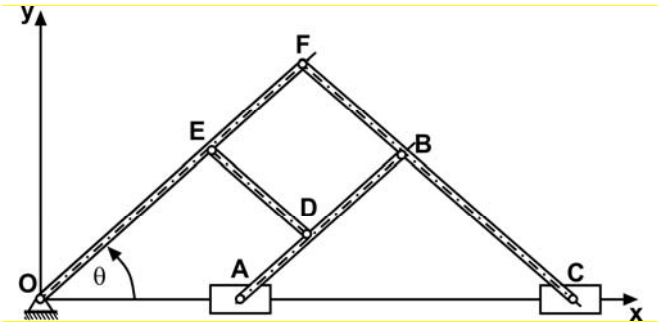


Fig. 2.1.14

mişcare de rotaţie uniformă în jurul articulaţiei fixe O după legea $\theta = \lambda t$, iar culisoarele A şi C, articulate la celelalte capete ale barelor AB, respectiv FC, se mişcă pe axa Ox. Să se determine legile de mişcare, traiectoriile, vitezele şi acceleraţiile punctelor B şi D.

Răspunsuri

Pentru B: $x = (b + 2\ell)\cos\lambda t$, $y = b\sin\lambda t$; $\dfrac{x^2}{(b+2\ell)^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

$v = \lambda\sqrt{(b+2\ell)^2\sin^2\lambda t + b^2\cos^2\lambda t}$; $a = \lambda^2\sqrt{(b+2\ell)^2\cos^2\lambda t + b^2\sin^2\lambda t}$.

Pentru D: $x = (b+\ell)\cos\lambda t$, $y = (b-\ell)\sin\lambda t$;

$\dfrac{x^2}{(b+\ell)^2} + \dfrac{y^2}{(b-\ell)^2} = 1$; $v = \lambda\sqrt{b^2 + \ell^2 - 2b\ell\cos 2\lambda t}$,

$a = \lambda^2\sqrt{b^2 + \ell^2 + 2b\ell\cos 2\lambda t}$.

2.1.15. În mişcarea plană a unui punct material, se dă legea sa de mişcare în coordonate polare:

$$r = v_0 t \ , \quad \theta = \omega_0 t \ ,$$

unde v_0 şi ω_0 sunt constante pozitive. Să se determine traiectoria, viteza, acceleraţia şi viteza areolară a punctului material şi să se exprime raza de curbură a traiectoriei sale în funcţie de timp şi în funcţie de unghiul polar θ.

Răspunsuri

Traiectoria de ecuaţie $r = v_0\theta/\omega_0$ este o spirală a lui Arhimede;

$v = v_0\sqrt{1+\omega_0^2 t^2}$; $a = v_0\omega_0\sqrt{4+\omega_0^2 t^2}$; $\Omega = \dfrac{1}{2}v_0^2\omega_0 t^2$;

$R_c = \dfrac{v_0(1+\omega_0^2 t^2)^{3/2}}{\omega_0(2+\omega_0^2 t^2)} = \dfrac{v_0(1+\theta^2)^{3/2}}{\omega_0(2+\theta^2)}$.

2.1.16. În mişcarea plană a unui punct material, se dă legea sa de mişcare în coordonate polare:

$$r = r_0 e^{\lambda t} \ , \quad \theta = \lambda t \ ,$$

unde r_0 şi λ sunt constante pozitive. Să se determine traiectoria, viteza, acceleraţia şi viteza areolară a punctului material şi să se exprime raza de curbură a traiectoriei sale în funcţie de timp şi în funcţie de raza vectoare r.

Răspunsuri

Traiectoria de ecuaţie $r = r_0 e^{\theta}$ este o spirală logaritmică;

$v = \sqrt{2} r_0 \lambda e^{\lambda t}$; $a = 2 r_0 \lambda^2 e^{\lambda t}$; $\Omega = r_0^2 \lambda \, e^{2\lambda t}/2$; $R_c = \sqrt{2} r_0 e^{\lambda t} = \sqrt{2} r$.

2.1.17. Ştiind că în mişcarea plană a unui punct material P, în orice moment al mişcării sale viteza şi viteza areolară faţă de un punct O din planul mişcării verifică relaţiile:

$$v = \frac{\sqrt{2}\lambda r_0^2}{r} \ , \quad \Omega = \frac{\lambda r_0^2}{2} \ ,$$

unde $r = OP$, $r_0 = OP_0$ este raza vectoare iniţială la momentul $t_0 = 0$, iar λ este o constantă pozitivă dată, să se determine legea sa de mişcare în coordonate polare, măsurând unghiul polar de la raza vectoare iniţială, ecuaţia traiectoriei, viteza, acceleraţia şi raza de curbură a traiectoriei sale.

Răspunsuri

$r = r_0 \sqrt{1 + 2\lambda t}$, $\theta = \ln \sqrt{1 + 2\lambda t}$; $r = r_0 e^{\theta}$; $v = \dfrac{\sqrt{2}\lambda r_0}{\sqrt{1 + 2\lambda t}}$;

$a = \dfrac{2\lambda^2 r_0}{(1 + 2\lambda t)^{3/2}}$; $R_c = r_0 \sqrt{2(1 + 2\lambda t)} = \sqrt{2} r$.

2.1.18. Sistemul format din două bare AM şi MB de aceeaşi lungime ℓ, articulate între ele în M, se mişcă în planul Oxy astfel încât celelalte extremităţi ale barelor se mişcă pe axa Ox după legile:

$$x_A = lf(t) \ , \quad x_B = \frac{kl}{f(t)} \ ,$$

unde funcţia adimensională de timp f(t) şi constanta pozitivă k se consideră cunoscute.

a) Să se determine legea de mişcare a punctului M în coordonate polare şi ecuaţia traiectoriei sale în coordonate carteziene.

b) Pentru $k = 3$, să se afle expresia funcţiei f(t), astfel încât puntul M să se mişte uniform cu viteza $2\lambda l$ pe un arc al traiectoriei determinate. În acest caz, să se precizeze arcul de traiectorie pe care se mişcă punctul considerat şi să se calculeze valoarea acceleraţiei sale.

Răspunsuri

a) $r = R = \ell\sqrt{1+k}$, $\theta = \arccos\dfrac{\ell}{2R}\left(f(t)+\dfrac{k}{f(t)}\right)$; $x^2 + y^2 = R^2$.

b) $f(t) = 2\cos\left(\lambda t - \dfrac{\pi}{3}\right) \pm \sqrt{4\cos^2\left(\lambda t - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1}$, $0 \le t \le \dfrac{2\pi}{3\lambda}$,

$-\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$, $a = 2\lambda^2\ell$.

2.1.19. Cadrul plan din fig. 2.1.19, constituit din barele drepte AB şi CE solidarizate în C şi perpendiculare între ele, se mişcă în planul Oxy astfel încât cele două bare trec prin manşoanele articulate în O, respectiv în punctul D de pe axa Ox, iar unghiul dintre bara AB şi axa Ox variază în timp după legea $\theta = \lambda t$, unde λ este o constantă pozitivă dată. Cunoscând $OD = CB = d$, să se determine legea de mişcare a punctului B în coordonate polare, ecuaţia traiectoriei sale, precum şi valorile absolute ale vitezei şi acceleraţiei sale la un moment t al mişcării. De asemenea, să se exprime raza de curbură a traiectoriei sale în funcţie de timp şi de raza vectoare.

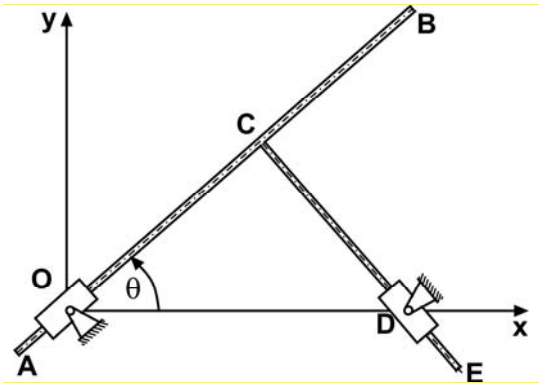


Fig. 2.1.19

Răspunsuri

$r = d(1+\cos\lambda t)$, $\theta = \lambda t$;

$r = d(1+\cos\theta)$ reprezintă ecuaţia unei cardioide în coordonate polare;

$v = 2\lambda d\left|\cos\dfrac{\lambda t}{2}\right|$;

$a = \lambda^2 d\sqrt{5+4\cos\lambda t}$;

$R_c = \dfrac{2d}{3}\sqrt{2(1+\cos\lambda t)} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2rd}$.

2.1.20. Mecanismul din fig. 2.1.20, format din bara AB ce trece printr-un manşon articulat în O şi manivela CD de lungime ℓ, articulate între ele în D, se mişcă în planul Oxy astfel încât manivela se roteşte în jurul punctului fix C de pe axa Ox după legea $\varphi = 2\lambda t$, unde λ este o constantă pozitivă dată. Cunoscând $OC = \ell$ şi $BD = b \le \ell$, să se determine legea de mişcare a punctului B în coordonate polare, ecuaţia traiectoriei sale şi valorile absolute ale vitezei şi acceleraţiei acestui punct la un moment t al mişcării sale. De asemenea, pentru $b = \ell$ să se exprime raza de curbură a traiectoriei sale în funcţie de timp şi în funcţie de unghiul polar θ din figură.

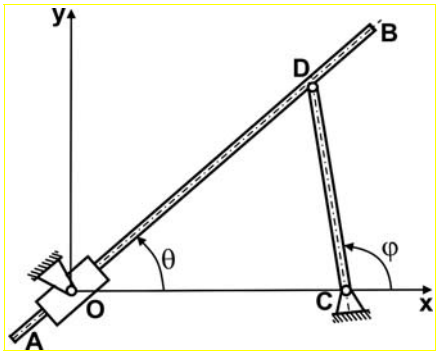


Fig. 2.1.20

Răspunsuri

$r = b + 2\ell\cos\lambda t$, $\theta = \lambda t$;

$r = b + 2\ell\cos\theta$ reprezintă ecuaţia unui melc al lui Pascal în coordonate polare;

$v = \lambda\sqrt{4\ell^2 + b^2 + 4\ell b\cos\lambda t}$; $a = \lambda^2\sqrt{16\ell^2 + b^2 + 8\ell b\cos\lambda t}$;

$$R_c = \ell\frac{(5+4\cos\lambda t)^{3/2}}{3(3+2\cos\lambda t)} = \frac{\ell}{3}\frac{(5+4\cos\theta)^{3/2}}{3+2\cos\theta} .$$

2.2. Cinematica vibraţiilor

2.2.1. Un mobil are o mişcare rectilinie dată de legea:

$$x_1 = -\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi(t-1)}{2} \quad [m] ,$$

unde timpul se măsoară în secunde. Legea mişcării rectilinii a unui alt mobil se poate exprima în funcţie de cea a primului mobil prin:

$$x_2 = \frac{\pi^2}{10}x_1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{10}\dot{x}_1 + \frac{\ddot{x}_1}{5} + k\dddot{x}_1 \quad [m] .$$

a) Pentru $k = 0$, să se determine amplitudinea A a mişcării rezultante a celui de-al doilea mobil, precum şi defazajul ψ faţă de mişcarea primului mobil, folosind atât reprezentarea vectorială, cât şi cea prin numere complexe a mărimilor armonice.

b) Să se determine valoarea constantei k pentru ca mişcările celor două mobile să fie în fază şi în acest caz să se scrie legea mişcării rezultante a celui de-al doilea mobil.

Rezolvare

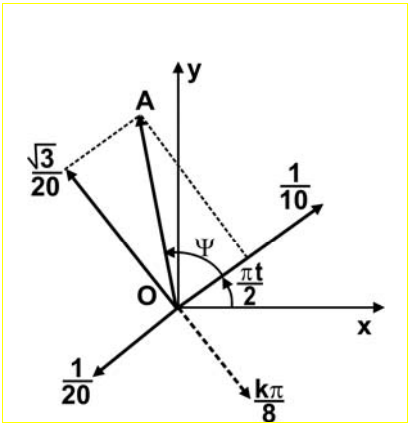


Fig. 2.2.1

a) Legea mişcării rectilinii a primului mobil se mai poate exprima sub forma:

$$x_1 = \frac{1}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right) = \frac{1}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{2}\,[m] ,$$

deci vibraţia sa armonică are amplitudinea $x_0 = 1/\pi^2$ [m], pulsaţia $\omega = \pi/2$ $[s^{-1}]$ şi faza iniţială $\varphi = 0$. Ca urmare, derivata de ordinul n în raport cu timpul a acestei legi de mişcare va fi o mărime armonică cu aceeaşi pulsaţie, defazată înaintea mişcării cu unghiul $n\pi/2$ şi având amplitudinea $x_0\omega^n$. Pentru $k = 0$ şi $n = 0, 1, 2$, în fig. 2.2.1 s-au reprezentat cei 3 vectori rotitori în planul Oxy în jurul originii axelor, care corespund

celor trei componente armonice de aceeaşi pulsaţie ale mişcării rezultante a celui de-al doilea mobil. Din figură rezultă imediat:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\right)^2 + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right)^2} = 0{,}1 \text{ m} , \quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt{3} , \quad \psi = \frac{\pi}{3} .$$

Dacă se foloseşte reprezentarea prin numere complexe a mărimilor armonice, legea de mişcare a primului mobil va fi reprezentată de numărul complex:

$$z_1 = \frac{1}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{2} + i\sin\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{1}{\pi^2} e^{i\pi t/2} .$$

Numărul complex ce reprezintă vibraţia armonică a celui de-al doilea mobil rezultă succesiv:

$$z_2 = \frac{\pi^2}{10} z_1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{10}\dot{z}_1 + \frac{1}{5}\ddot{z}_1 = \frac{\pi^2}{10} z_1 + i\frac{\sqrt{3}\pi^2}{20} z_1 - \frac{\pi^2}{20} z_1 = \frac{\pi^2}{10} z_1\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{10}\cdot\frac{1}{\pi^2} e^{i\pi t/2}\cdot e^{i\pi/3} = \frac{1}{10} e^{i(\pi t/2 + \pi/3)} ,$$

de unde se obţin aceleaşi valori pentru A şi ψ.

b) În fig. 2.2.1 s-a reprezentat cu linie întreruptă şi cel de-al patrulea vector, corespunzător celei de-a patra componente armonice a mişcării mobilului al doilea, dacă constanta k este diferită de zero şi pozitivă. Din condiţia ca vibraţia sa armonică să fie în fază cu cea a primului mobil, rezultă:

$$\frac{\sqrt{3}}{20} = \frac{k\pi}{8} , \quad k = \frac{2\sqrt{3}}{5\pi} , \quad x_2 = \frac{1}{20}\cos\frac{\pi t}{2} = 0{,}05\cos\frac{\pi t}{2} \ \ [\text{m}] .$$

2.2.2. O forţă perturbatoare ce acţionează într-un sistem vibrant are variaţia în timp din fig. 2.2.2, care se poate exprima analitic prin:

$$F(t) = F_0 \operatorname{sign}(\sin\omega t) ,$$

unde F_0 şi ω sunt constante pozitive date. Această forţă fiind periodică cu perioada $T = 2\pi/\omega$, să se dezvolte în serie Fourier.

Rezolvare

Dezvoltarea în serie Fourier a forţei perturbatoare date este:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) ,$$

pentru care coeficienții se calculează cu formulele cunoscute:

$$a_0=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}F(t)dt\ ,\quad a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}F(t)\cos n\omega t dt\ ,\quad b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}F(t)\sin n\omega t dt\ .$$

Deoarece în prima perioadă de variație a forței, aceasta se poate exprima sub forma:

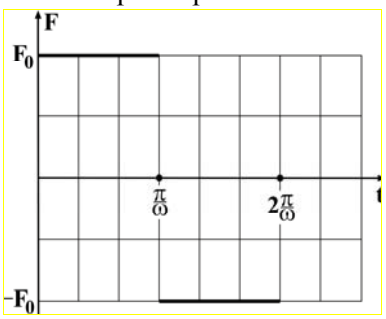


Fig. 2.2.2

$$F(t)=\begin{cases}F_0\ , & t\in\left(0,\dfrac{\pi}{\omega}\right)\\ 0\ , & t=0,\dfrac{\pi}{\omega},\dfrac{2\pi}{\omega}\\ -F_0\ , & t\in\left(\dfrac{\pi}{\omega},\dfrac{2\pi}{\omega}\right)\end{cases},$$

coeficienții a_0 și a_n rezultă nuli, iar pentru b_n se obține:

$$b_n=\frac{\omega F_0}{\pi}\frac{1}{n\omega}\left(-\cos n\omega t\Big|_0^{\pi/\omega}+\cos n\omega t\Big|_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}\right)=\begin{cases}0\ , & n=2k\ ,\ k\in N^*\\ \dfrac{4F_0}{n\pi}\ , & n=2k-1\end{cases}.$$

Ca urmare, dezvoltarea în serie Fourier a forței date va fi:

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1}\right)=\frac{4F_0}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+...\right).$$

2.2.3. Un punct execută o vibrație armonică pe axa Ox după legea $x=A\cos(\omega t+\varphi)$. Știind că perioada mișcării este $T=4$ s și că la momentul $t_1=6$ s punctul are elongația $x_1=0{,}05$ m și viteza $v_1=-0{,}0785$ m/s, să se exprime numeric legea sa de mișcare, măsurând elongația în metri și timpul în secunde.

Răspuns

$$x=\frac{\sqrt{2}}{20}\cos\left(\frac{\pi t}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\ \ [\text{m}]\ .$$

2.2.4. Un punct execută o vibrație armonică pe axa Ox după legea $x=A\sin\omega t$. Știind că la momentele t_1 și t_2 din prima perioadă a mișcării, elongația și viteza punctului sunt x_1 și v_1, respectiv x_2 și v_2, să se determine:

a) amplitudinea A, pulsația T şi cele două momente;

b) legea mişcării şi momentele t_1, t_2 pentru datele numerice: $x_1 = x_2 = \sqrt{3}/20 = 0{,}0866$ m, $v_1 = -v_2 = 0{,}1$ m/s.

Răspunsuri

a) $A = \sqrt{\dfrac{v_2^2 x_1^2 - v_1^2 x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}}$,

$t_1 = \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\dfrac{\omega x_1}{v_1}$, $t_2 = \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\dfrac{\omega x_2}{v_2}$;

b) $x = 0{,}1\sin 2t \ \ [\text{m}]$,

$t_2 = 2t_1 = \dfrac{\pi}{3} = 1{,}047$ s.

2.2.5. Vibrația armonică a unui punct este descrisă de legea:

$$x = x_0 \cos(25t + \psi) \ \ [\text{mm}],$$

în care timpul se exprimă în secunde.

a) Dacă la momentul inițial $t_0 = 0$ al mişcării punctului sunt date elongația $x = 0$ şi viteza $\dot{x} = -0{,}125\sqrt{3}$ [m/s], să se determine amplitudinea x_0 şi faza inițială ψ.

b) Ştiind că mişcarea determinată este rezultanta compunerii a două vibrații armonice coliniare de aceeaşi pulsație, dintre care prima componentă este $x_1 = 5\cos 25t$ [mm], să se afle cea de-a doua componentă.

Răspunsuri

a) $x_0 = 5\sqrt{3} = 8{,}66$ mm,

$\psi = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $x_2 = 10\cos\left(25t + \dfrac{2\pi}{3}\right) \ \ [\text{mm}]$.

2.2.6. Un mobil are o vibraţie rectilinie armonică dată de legea $x_1 = x_0 \cos\omega t$. Legea mişcării rectilinii a unui alt mobil se poate exprima în funcţie de cea a primului mobil prin:

$$x_2 = 2\omega\int_0^t x_1 dt + 2x_1 + \frac{1}{\omega}\dot{x}_1 + \frac{1}{\omega^2}\ddot{x}_1 \ .$$

Să se determine legea mişcării rezultante a celui de-al doilea mobil, folosind atât reprezentarea vectorială, cât şi cea prin numere complexe a mărimilor armonice.

Răspuns

$$x_2 = \sqrt{2}x_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \ .$$

2.2.7. Un mobil are o vibraţie rectilinie armonică dată de legea $x_1 = x_0 \cos\omega t$. Legea mişcării rectilinii a unui alt mobil se poate exprima în funcţie de cea a primului mobil prin:

$$x_2 = x_1 + \frac{2\sqrt{3}}{\omega}\dot{x}_1 + \frac{2}{\omega^2}\ddot{x}_1 + \frac{\sqrt{3}}{\omega^3}\dddot{x}_1 \ .$$

Să se determine legea mişcării rezultante a celui de-al doilea mobil, folosind atât reprezentarea vectorială, cât şi cea prin numere complexe a mărimilor armonice.

Răspuns

$$x_2 = 2x_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \ .$$

2.2.8. Legea mişcării rectilinii a unui mobil este:

$$x_1 = -3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \ \ [\text{cm}] \ ,$$

unde timpul se măsoară în secunde. Ştiind că legea mişcării rectilinii a unui alt mobil se poate exprima în funcţie de cea a primului mobil prin:

$$x_2 = 4\int_0^t x_1 dt + 2x_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_1 + \frac{1}{4}\ddot{x}_1 \ ,$$

să se determine această lege de mişcare şi defazajul mişcării primului mobil faţă de aceasta, folosind cele două reprezentări cunoscute ale mărimilor armonice.

Răspunsuri

$$x_2 = 3\sqrt{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{12}\right) \ \ [\text{cm}] \ , \quad \Delta\Phi = \frac{\pi}{4} \ .$$

2.2.9. Legea mişcării rectilinii a unui mobil este:

$$x_1 = -2\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \ \ [\text{cm}] \ ,$$

unde timpul se măsoară în secunde. Ştiind că legea mişcării rectilinii a unui alt mobil se poate exprima în funcţie de cea a primului mobil prin:

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 - 2\ddot{x}_1 - 8\dddot{x}_1 \ ,$$

să se determine această lege de mişcare şi defazajul acesteia faţă de mişcarea primului mobil, folosind cele două reprezentări cunoscute ale mărimilor armonice.

Răspunsuri

$$x_2 = 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) \ \ [\text{cm}] \ , \quad \Delta\Phi = \frac{\pi}{4} \ .$$

2.2.10. Un punct material are o mişcare rectilinie compusă din două vibraţii armonice coliniare, ale cărei componente sunt:

$$x_1 = 3x_0 \sin 2\omega t \ ,$$
$$x_2 = 2x_0 \sin 3\omega t \ ,$$

unde x_0 şi ω sunt constante pozitive cunoscute. Să se determine valorile extreme ale amplitudinii mişcării rezultante, momentele la care sunt atinse, perioada de variaţie a amplitudinii şi perioada mişcării rezultante.

Răspunsuri

$A_{max} = 5x_0$, $t_k = \dfrac{2k\pi}{\omega}$, $A_{min} = x_0$, $t_k = (2k-1)\dfrac{\pi}{\omega}$, $k \in N^*$, $T' = T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

2.2.11. Un punct material are o mişcare rectilinie compusă din două vibraţii armonice coliniare, ale cărei componente sunt:

$$x_1 = 4x_0 \cos\omega t ,$$
$$x_2 = x_0 \cos 2\omega t ,$$

unde x_0 şi ω sunt constante pozitive cunoscute. Să se determine:

a) valorile extreme ale amplitudinii mişcării rezultante, momentele la care sunt atinse, perioada de variaţie a amplitudinii şi perioada mişcării rezultante;

b) valorile extreme ale vitezei punctului material şi poziţiile sale la momentele în care sunt atinse.

Răspunsuri

a) $A_{max} = 5x_0$, $t_k = \dfrac{2k\pi}{\omega}$, $A_{min} = 3x_0$, $t_k = (2k-1)\dfrac{\pi}{\omega}$, $k \in N^*$, $T' = T = \dfrac{2\pi}{\omega}$;

b) $v_{max} = 3\sqrt{3}x_0\omega$, $x(v_{max}) = \dfrac{3}{2}x_0$,

$v_{min} = 0$, $x(v_{min}) = -3x_0$.

2.2.12. Un mobil are o mişcare rectilinie compusă din două vibraţii armonice coliniare cu pulsaţiile de valori apropiate, ale cărei componente sunt:

$$x_1 = 0{,}007 \sin\left(0{,}051\pi t + \frac{\pi}{3}\right) ,$$
$$x_2 = 0{,}013 \cos\left(0{,}053\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \ [\mathrm{m}] ,$$

unde timpul se măsoară în secunde. Să se determine valorile extreme ale amplitudinii mişcării rezultante, momentele la care sunt atinse, perioada bătăilor şi perioada mişcării rezultante.

Răspunsuri

$A_{max} = 0{,}02\ \text{m}$, $t_k = 1000k$, $A_{min} = 0{,}006\ \text{m}$, $t_k = 500(2k-1)$, $k \in N^*$, $T' = 10^3\ \text{s}$, $T = 2 \cdot 10^3\ \text{s}$.

2.2.13. Un mobil are o mişcare rectilinie compusă din două vibraţii armonice coliniare cu pulsaţiile de valori apropiate, ale cărei componente sunt:

$$x_1 = 0{,}064 \sin\left(169\pi t + \frac{\pi}{6}\right) , \quad x_2 = 0{,}036 \cos\left(182\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \ [\text{m}] ,$$

unde timpul se măsoară în secunde. Să se determine valorile extreme ale amplitudinii mişcării rezultante, momentele la care sunt atinse, perioada bătăilor şi perioada mişcării rezultante.

Răspunsuri

$A_{max} = 0{,}1\ \text{m}$, $t_k = \frac{2k}{13}$, $A_{min} = 0{,}028\ \text{m}$, $t_k = \frac{2k-1}{13}$, $k \in N^*$, $T' = T = \frac{2}{13}\ [\text{s}]$

.

2.2.14. Un mobil are o mişcare rectilinie compusă din două vibraţii armonice coliniare cu pulsaţiile de valori apropiate, ale cărei componente sunt:

$$x_1 = 0{,}05 \cos 3t , \quad x_2 = 0{,}15 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \ [\text{m}] ,$$

unde timpul se măsoară în secunde. Să se determine valorile extreme ale amplitudinii mişcării rezultante, momentele la care sunt atinse, perioada bătăilor şi să se arate că mişcarea rezultantă nu este periodică.

Răspunsuri

$A_{max} = 0{,}2\ \text{m}$, $t_k = \frac{(8k+1)\pi}{4(\pi-3)}$, $A_{min} = 0{,}1\ \text{m}$, $t_k = \frac{(8k-3)\pi}{4(\pi-3)}$, $k \in N^*$, $T' = \frac{2\pi}{\pi-3}[\text{s}]$. Mişcarea rezultantă nu este periodică pentru că raportul $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{\pi}$ este iraţional.

2.2.15. Pentru vibrația rectilinie amortizată a unui punct se cunosc: pseudoperioada $T = 5\,s$, decrementul logaritmic $\delta = 0{,}2$, poziția inițială $x_0 = 0{,}025\ m$ şi viteza inițială $v_0 = -10^{-3}\ m/s$. Să se determine legea mişcării punctului şi ecuațiile curbelor pe care sunt situate punctele de extrem din diagrama mişcării sale, dacă timpul se exprimă în secunde.

Răspunsuri

$x = 0{,}025e^{-0{,}04t}\cos 0{,}4\pi t$, $\quad x_{1,2}^{e} = \pm 0{,}024e^{-0{,}04t}\ \ [m]$.

2.2.16. Un punct execută o vibrație amortizată pe axa Ox după legea $x = Ae^{-\varepsilon t}\sin\omega t$. Ştiind că la momentele t_1 şi $t_2 > t_1$ date, în diagrama mişcării punctului se ating primul maxim de valoare $x_1 > 0$, respectiv primul minim de valoare $x_2 < 0$, valori de asemenea cunoscute, care verifică relația: $\sin\dfrac{\pi t_1}{t_2 - t_1} = -\sin\dfrac{\pi t_2}{t_2 - t_1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\dfrac{x_1}{|x_2|}}}$, să se determine:

a) valorile pentru constantele pozitive A, ε şi T;

b) legea mişcării punctului pentru datele numerice: $t_1 = 2{,}5\,s$, $t_2 = 12{,}5\,s$, $x_1 = \sqrt{2}/e^{\pi/4} = 0{,}645\ dm$, $x_2 = -\sqrt{2}/e^{5\pi/4} = -0{,}028\ dm$, timpul fiind măsurat în secunde.

Răspunsuri

a) $\omega = \dfrac{\pi}{t_2 - t_1}$, $\quad T = 2(t_2 - t_1)$, $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\ln\dfrac{x_1}{|x_2|}$,

$A = \dfrac{x_1}{\pi}\left(\dfrac{x_1}{|x_2|}\right)^{\frac{t_1}{t_2 - t_1}}\sqrt{\pi^2 + \ln^2\dfrac{x_1}{|x_2|}}$;

b) $x = 2e^{-\pi t/10}\sin\dfrac{\pi t}{10}\ \ [dm]$.

2.2.17. Un punct execută o vibraţie amortizată pe axa Ox după legea $x = x_0 e^{-\varepsilon t} \cos pt$. Cunoscând pseudoperioada T şi decrementul logaritmic δ şi ştiind că la un moment $t_1 < T/4$ al mişcării punctului sunt date elongaţia $x_1 > 0$ şi viteza sa $v_1 < 0$, să se determine:

a) momentul t_1, elongaţia x_2 şi viteza v_2 la momentul $t_2 = t_1 + T$;

b) legea mişcării punctului şi ecuaţiile curbelor pe care sunt situate punctele de extrem din diagrama mişcării sale pentru datele numerice: $T = 4$ s, $\delta = 0{,}4$, $x_1 = 0{,}05\sqrt{2}/e^{0{,}05} = 0{,}067$ m, $v_1 = -\left(0{,}1 + \frac{\pi}{2}\right)x_1 = -0{,}112$ m/s, timpul fiind măsurat în secunde.

Răspunsuri

a) $t_1 = \frac{T}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{|v_1|T}{2\pi x_1} - \frac{\delta}{2\pi}\right)$, $x_2 = \frac{x_1}{e^{\delta}}$, $v_2 = \frac{v_1}{e^{\delta}} < 0$;

b) $x = 0{,}1e^{-0{,}1t}\cos\frac{\pi t}{2}$, $x^e_{1,2} = \pm 0{,}099e^{-0{,}1t}$.

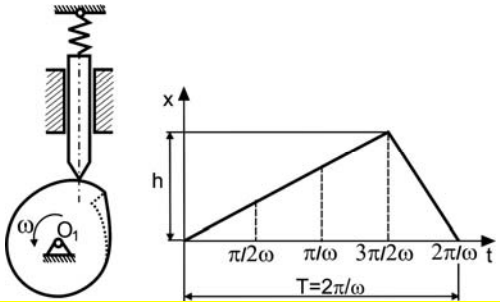


Fig. 2.2.18.1) Fig. 2.2.18.2)

2.2.18. În fig. 2.2.18.1) este reprezentat un mecanism cu camă, la care cama are o mişcare de rotaţie uniformă în jurul articulaţiei O_1, cu viteza unghiulară ω. Profilul camei este astfel realizat, încât tachetul mecanismului are o mişcare rectilinie după legea dată prin diagrama din fig. 2.2.18.2), h şi T fiind cunoscute. Deoarece mişcarea tachetului este periodică cu perioada $T = 2\pi/\omega$, să se dezvolte în serie Fourier.

Răspuns

$$x(t)=\frac{h}{2}-\frac{4h}{3\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(4k-3)^2}\left(\cos(4k-3)\omega t+\sin(4k-3)\omega t\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(4k-2)\omega t+\frac{2}{(4k-1)^2}\left(\cos(4k-1)\omega t-\sin(4k-1)\omega t\right)\right).$$

2.2.19. Pentru mecanismul cu camă din fig. 2.2.18.1), profilul camei, reprezentat cu linie discontinuă, este astfel realizat, încât tachetul său are o mişcare rectilinie după legea dată prin diagrama din fig. 2.2.19, unde h şi T sunt cunoscute. Mişcarea tachetului fiind periodică cu perioada $T=2\pi/\omega$, să se dezvolte în serie Fourier.

Răspuns

$$x(t)=\frac{h}{2}-\frac{h}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega t}{n}\right)=\frac{h}{2}-\frac{h}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{\sin 2\omega t}{2}+...\right).$$

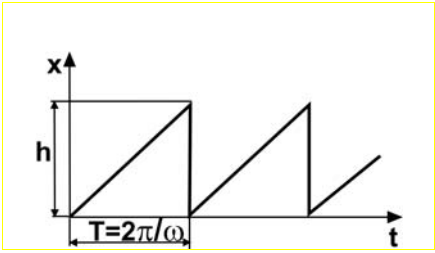


Fig. 2.2.19

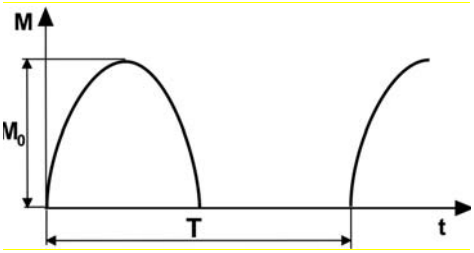


Fig. 2.2.20

2.2.20. Momentul cuplului transmis de cilindrul unei pompe cu piston cu simplu efect arborelui principal al pompei variază în timp după legea din fig. 2.2.20, care se exprimă analitic sub forma:

$$M=\begin{cases}M_0\sin\omega t, & \frac{2n\pi}{\omega}\le t\le\frac{(2n+1)\pi}{\omega}\\ 0, & \frac{(2n+1)\pi}{\omega}\le t\le\frac{2(n+1)\pi}{\omega},\end{cases}$$

unde $n\in N$, iar M_0 şi T sunt constante pozitive cunoscute. Acest moment având o variație periodică cu perioada $T=2\pi/\omega$, să se dezvolte în serie Fourier.

Răspuns

$$M(t)=\frac{M_0}{\pi}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cos 2k\omega t}{4k^2-1}\right)=\frac{M_0}{\pi}\left(1-\frac{2}{3}\cos 2\omega t-...\right).$$

2.3. Cinematica corpului rigid

2.3.1. În mişcarea unui corp rigid, având sistemul de referinţă legat de el Oxyz, se cunosc, în orice moment al mişcării, vitezele punctelor sale $A(R, 0, 0)$, $B(R, R, R)$ şi $C(0, R, 0)$, exprimate prin:

$$\vec{v}_A = \lambda R\left(2\vec{j} + \vec{k}\right)\sin\lambda t \ , \quad \vec{v}_B = \lambda R\left(-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right)\sin\lambda t \ ,$$

$$\vec{v}_C = \lambda R\left(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)\sin\lambda t \ ,$$

unde λ este o constantă pozitivă dată.

a) Să se arate că vitezele acestor puncte verifică proprietăţile generale ale distribuţiei de viteze ale unui corp rigid.

b) Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale rigidului la un moment t al mişcării sale, determinând parametrii cinematici, viteza şi acceleraţia de alunecare, precum şi axele instantanee pentru distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale rigidului.

Rezolvare

a) Deoarece viteza unghiulară a rigidului nu este cunoscută, se poate verifica numai proprietatea conform căreia proiecţiile vitezelor a două puncte din rigid pe dreapta care le uneşte sunt egale. Pentru aceasta, se calculează versorii celor trei drepte determinate de câte două din punctele A, B şi C:

$$\vec{e}_1 = \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} + \vec{k}\right) \ , \qquad \vec{e}_2 = \frac{\overline{AC}}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right) \ , \qquad \vec{e}_3 = \frac{\overline{CB}}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{k}\right) \ ,$$

cu ajutorul cărora se verifică această proprietate după cum urmează:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda R(2+1)\sin\lambda t = \vec{v}_B \cdot \vec{e}_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda R\sin\lambda t \ ,$$

$$\vec{v}_A \cdot \vec{e}_2 = \sqrt{2}\lambda R\sin\lambda t = \vec{v}_C \cdot \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda R(1+1)\sin\lambda t \ ,$$

$$\vec{v}_B \cdot \vec{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda R(-1+1)\sin\lambda t = \vec{v}_C \cdot \vec{e}_3 = 0 \ .$$

b) Pentru studiul distribuției de viteze a rigidului, în primul rând este necesar să se determine parametrii cinematici corespunzători, adică vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ al rigidului şi viteza $\vec{v}_O$ a originii sistemului de referință legat de el. Pentru aceasta, se aplică formula generală de distribuție a vitezelor punctelor A, B şi C, ale căror viteze sunt date, alegând ca nou punct de referință punctul C, adică:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overline{CA} \ ,$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overline{CB} \ .$$

Proiectând aceste relații pe axele sistemului de referință legat de rigid, se obțin ecuațiile:

$$0 = -\lambda R \sin \lambda t + R\omega_z \ , \quad 2\lambda R \sin \lambda t = \lambda R \sin \lambda t + R\omega_z \ , \quad 0 = \omega_x + \omega_y \ ,$$
$$0 = R\omega_y \ , \quad 2\lambda R \sin \lambda t = \lambda R \sin \lambda t + R(\omega_z - \omega_x) \ , \quad 0 = -R\omega_y \ ,$$

din care rezultă:

$$\omega_x = \omega_y = 0 \ , \quad \omega_z = \lambda \sin \lambda t \ , \quad \vec{\omega} = \lambda \sin \lambda t \ \vec{k} \ .$$

Vectorul viteză unghiulară al rigidului fiind astfel determinat, se poate calcula viteza originii sistemului de referință legat de el:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overline{CO} = \lambda R\left(\vec{j} + \vec{k}\right) \sin \lambda t \ ,$$

precum şi viteza de alunecare:

$$\vec{u} = \left(\vec{v}_O \circ \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \lambda R \sin \lambda t \ \vec{k} \ ,$$

cu ajutorul căreia se analizează cazurile posibile de distribuție a vitezelor rigidului la un moment t al mişcării sale. Se observă că la momentele $t_k = k\pi/\lambda$, $k \in N$, atât viteza unghiulară cât şi viteza de alunecare sunt nule, deci la aceste momente rigidul va avea o distribuție de viteze de repaus. La orice moment $t \neq t_k$, distribuția de viteze a rigidului va fi de rototranslație, deoarece viteza unghiulară şi viteza de alunecare sunt coliniare şi diferite de zero. Pentru a determina axa instantanee de rototranslație Δ', corespunzătoare distribuției de viteze a rigidului la momentele $t \neq t_k$, se impune condiția ca viteza unui punct curent Q de pe ea să fie egală cu viteza de alunecare, adică:

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_Q = \vec{u} \ ,$$

de unde rezultă:

$$-y\lambda \sin \lambda t = 0 \ , \quad \lambda R \sin \lambda t + x\lambda \sin \lambda t = 0 \ ; \quad x = -R \ , \quad y = 0 \ .$$

Pentru studiul distribuției de accelerații a rigidului, trebuie determinați mai întâi parametrii cinematici corespunzători, adică vectorul accelerație unghiulară $\vec{\varepsilon}$ al rigidului şi accelerația $\vec{a}_O$ a originii sistemului de referință legat de el, cunoscând parametrii cinematici pentru distribuția vitezelor. Expresiile analitice ale acestor vectori devin:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \lambda^2 \cos\lambda t\,\vec{k},$$

$$\vec{a}_O = \frac{\partial\vec{v}_O}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{v}_O = \lambda^2 R\left(\vec{j}+\vec{k}\right)\cos\lambda t - \lambda^2 R\sin^2\lambda t\,\vec{i} =$$

$$= \lambda^2 R\left(-\sin^2\lambda t\,\vec{i} + \cos\lambda t\,\vec{j} + \cos\lambda t\,\vec{k}\right).$$

Se observă că vectorii viteză şi acceleraţie unghiulară sunt coliniari şi nu se anulează simultan, astfel încât cazurile de distribuţie a acceleraţilor rigidului la un moment t al mişcării sale se analizează în funcţie de acceleraţia de alunecare, care este:

$$\vec{w} = \left(\vec{a}_O \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}\right)\frac{\vec{\omega}}{\omega} = \left(\vec{a}_O \cdot \frac{\vec{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\frac{\vec{\varepsilon}}{\varepsilon} = \lambda^2 R\cos\lambda t\vec{k}\ .$$

La momentele $t_n = (2n+1)\pi/2\lambda$, $n \in N$, acceleraţia de alunecare se anulează, deci la aceste momente rigidul va avea o distribuţie de acceleraţii de rotaţie în jurul unei axe, deoarece viteza unghiulară este diferită de zero. La orice moment $t \neq t_n$, acceleraţia de alunecare este nenulă şi distribuţia de acceleraţii a rigidului va fi de rototranslaţie. În ambele cazuri, axa instantanee de rotaţie sau rototranslaţie Δ'' va fi aceeaşi, deoarece ecuaţiile ei se obţin din condiţia ca acceleraţia unui punct curent P de pe ea să fie egală cu acceleraţia de alunecare, adică:

$$\vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}_P + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_P\right) = \vec{w}\ ,$$

de unde rezultă:

$$-\lambda^2 R\sin^2\lambda t - y\lambda^2\cos\lambda t - x\lambda^2\sin^2\lambda t = 0\ ,$$

$$\lambda^2 R\cos\lambda t + x\lambda^2\cos\lambda t - y\lambda^2\sin^2\lambda t = 0\ ;$$

$$x = -R\ ,$$

$$y = 0\ .$$

Se observă că axele instantanee Δ' şi Δ'' coincid, deci mişcarea absolută a rigidului va fi o mişcare de rototranslaţie faţă de axa fixă O_1z_1 paralelă cu Oz, pe care se mişcă punctele sale de coordonate $(-R, 0, z)$ în raport cu sistemul de referinţă legat de el. Mai mult, alegând sistemul de referinţă fix astfel încât, la momentul iniţial $t_0 = 0$ al mişcării, punctul O să se afle pe axa O_1x_1 la distanţa R de O_1, rezultă că rigidul are o mişcare de şurub, punctul său O mişcându-se pe elicea cilindrică de ecuaţii parametrice:

$$x_{1O} = R\cos\theta\ ,$$

$$y_{1O} = R\sin\theta\ ,$$

$$z_{1O} = R\theta\ ,$$

în care unghiul θ dintre axele O_1x_1 şi Ox, măsurat într-un plan perpendicular pe axa de rototranslaţie O_1z_1, variază în timp după legea:

$$\theta = \int_0^t \omega dt = \lambda \int_0^t \sin \lambda t dt = 1 - \cos \lambda t \quad [\text{Rad}] .$$

2.3.2. Legea de mişcare a unui corp rigid este dată prin legea de mişcare a originii sistemului de referinţă Oxyz legat de el faţă de sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ şi prin exprimarea unghiurilor lui Euler ca funcţii de timp, sub forma: $x_{1O} = R\cos\omega_0 t$, $y_{1O} = R\sin\omega_0 t$, $z_{1O} = 0$, $\psi = \omega_0 t$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = \lambda\omega_0 t$, unde R, ω_0 şi λ sunt constante pozitive cunoscute.

a) Să se studieze distribuţia de viteze a rigidului la un moment t al mişcării sale, determinând parametrii cinematici corespunzători, viteza de alunecare şi ecuaţiile axei instantanee de rototranslaţie faţă de sistemul de referinţă fix şi faţă de cel legat de rigid.

b) Să se determine axoidele mişcării rigidului.

c) Pentru $\lambda = 1$ să se studieze distribuţia de acceleraţii a rigidului, determinând parametrii cinematici corespunzători şi polul acceleraţiilor.

d) În condiţia de la punctul c), să se calculeze viteza şi acceleraţia punctului P_1 de pe direcţia pozitivă a axei Ox, situat la distanţa R de O, la momentele $t_k = (2k+1)\pi/\omega_0$, $k \in N$.

Rezolvare

a) Matricea de transfer a rigidului este:

$$[A] = [A_\psi][A_\theta][A_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t\cos\lambda\omega_0 t & -\cos\omega_0 t\sin\lambda\omega_0 t & \sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t\cos\lambda\omega_0 t & -\sin\omega_0 t\sin\lambda\omega_0 t & -\cos\omega_0 t \\ \sin\lambda\omega_0 t & \cos\lambda\omega_0 t & 0 \end{bmatrix},$$

astfel încât parametrii cinematici pentru studiul distribuţiei de viteze se pot exprima atât prin proiecţii pe axele sistemului de referinţă legat de rigid:

$$\{v_O\} = [A]^T \begin{Bmatrix} -R\omega_0\sin\omega_0 t \\ R\omega_0\cos\omega_0 t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R\omega_0 \end{Bmatrix}, \quad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_0\sin\lambda\omega_0 t \\ \omega_0\cos\lambda\omega_0 t \\ \lambda\omega_0 \end{Bmatrix},$$

cât şi prin proiecţii pe axele sistemului de referinţă fix:

$$\{v_O^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} -R\omega_0\sin\omega_0 t \\ R\omega_0\cos\omega_0 t \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\omega^{(1)}\} = [A]\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \lambda\omega_0\sin\omega_0 t \\ -\lambda\omega_0\cos\omega_0 t \\ \omega_0 \end{Bmatrix}.$$

De aici rezultă imediat valoarea algebrică a vitezei de alunecare:

$$u = \vec{v}_O \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = -\frac{\lambda R \omega_0}{\sqrt{1+\lambda^2}} \neq 0 \ ,$$

deci la orice moment al mişcări rigidului distribuția sa de viteze va fi de rototranslație față de axa instantanee (Δ), ale cărei ecuații se determină din condiția:

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_\Delta = u \frac{\vec{\omega}}{\omega} \ .$$

Proiectând această ecuație pe axele sistemului de referință mobil legat de rigid, se obțin ecuațiile corespunzătoare ale axei (Δ):

$$x\cos\lambda\omega_0 t - y\sin\lambda\omega_0 t + \frac{R}{1+\lambda^2} = 0 \ , \quad x\sin\lambda\omega_0 t + y\cos\lambda\omega_0 t - \frac{z}{\lambda} = 0 \ . \qquad (1)$$

Pentru a determina ecuațiile axei (Δ) față de sistemul de referință fix, se înlocuieşte în ecuația sa vectorială: $\vec{r}_\Delta = \vec{r}_{1\Delta} - \vec{r}_{10}$, după care, prin proiectarea ei pe axele fixe, rezultă:

$$x_1\cos\omega_0 t + y_1\sin\omega_0 t - \frac{\lambda^2 R}{1+\lambda^2} = 0 \ , \quad x_1\sin\omega_0 t - y_1\cos\omega_0 t - \lambda z_1 = 0 \ . \qquad (2)$$

b) Ecuația axoidei fixe se obține prin eliminarea timpului între ecuațiile (2) ale axei instantanee de rototranslație față de sistemul de referință fix. De asemenea, ecuația axoidei mobile se determină din ecuațiile (1), prin eliminarea timpului. Ca urmare, ecuațiile axoidelor rezultă:

$$\text{(AF)} \qquad x_1^2 + y_1^2 = \lambda^2 z_1^2 + \frac{\lambda^4 R^2}{\left(1+\lambda^2\right)^2} \ ,$$

$$\text{(AM)} \qquad x^2 + y^2 = \frac{z^2}{\lambda^2} + \frac{R^2}{\left(1+\lambda^2\right)^2} \ .$$

Se observă că ambele axoide sunt hiperboloizi de rotație cu o pânză, axoida fixă (AF) având centrul O_1 şi axa de simetrie O_1z_1, iar axoida mobilă (AM) are centrul O şi axa de simetrie Oz.

c) Distribuția de acceleraţii a rigidului la un moment t al mişcării sale se va studia inițial față de sistemul de referință mobil legat de el. Pentru $\lambda = 1$, parametrii cinematici necesari pentru studiul distribuției de acceleraţii devin:

$$\{a_O\} = [A]^T \begin{Bmatrix} -R\omega_0^2\cos\omega_0 t \\ -R\omega_0^2\sin\omega_0 t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R\omega_0^2\cos\omega_0 t \\ R\omega_0^2\sin\omega_0 t \\ 0 \end{Bmatrix} \ ,$$

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_0 \sin\omega_0 t \\ \omega_0 \cos\omega_0 t \\ \omega_0 \end{Bmatrix}, \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \omega_0^2 \cos\omega_0 t \\ -\omega_0^2 \sin\omega_0 t \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Deoarece produsul vectorial:

$$\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon} = \omega_0^3 \left(\sin\omega_0 t\ \vec{i} + \cos\omega_0 t\ \vec{j} - \vec{k}\right)$$

nu se poate anula, rezultă că, în orice moment al mişcării rigidului, distribuția sa de acceleraţii va fi de rotație în jurul unui pol J, a cărui poziție se determină din condiția:

$$\vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_J + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_J\right) = \vec{0}\ .$$

Proiectând această ecuație pe axele sistemului de referință legat de rigid, se obține sistemul linear şi neomogen de 3 ecuaţii algebrice:

$$\begin{cases} -x_J\left(1+\cos^2\omega_0 t\right) + y_J \sin\omega_0 t\cos\omega_0 t = R\cos\omega_0 t\ , \\ -x_J \sin\omega_0 t\cos\omega_0 t + y_J\left(1+\sin^2\omega_0 t\right) = R\sin\omega_0 t\ , \\ 2x_J \sin\omega_0 t + 2y_J \cos\omega_0 t - z_J = 0\ , \end{cases}$$

care are determinantul $-\left|\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}\right|^2 \neq 0$, deci rezultă soluția unică:

$$x_J = -\frac{R}{2}\cos\omega_0 t\ , \qquad y_J = \frac{R}{2}\sin\omega_0 t\ , \qquad z_J = 0\ .$$

Coordonatele polului acceleraţiilor faţă de sistemul de referinţă fix se pot determina pe baza relaţiei matriceale cunoscute:

$$\left\{r_{1J}^{(1)}\right\} = \left\{r_{1O}^{(1)}\right\} + [A]\{r_J\} = \begin{Bmatrix} R\cos\omega_0 t \\ R\sin\omega_0 t \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{R}{2}\begin{Bmatrix} -\cos\omega_0 t \\ -\sin\omega_0 t \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{R}{2}\begin{Bmatrix} \cos\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t \\ 0 \end{Bmatrix},$$

deci polul acceleraţiilor se va găsi la mijlocul segmentului de dreaptă O_1O la orice moment al mişcării rigidului.

d) Pentru determinarea vitezei şi acceleraţiei punctului P_1 de coordonate $(R, 0, 0)$ faţă de sistemul de referinţă legat de rigid, este mai uşor să se aplice formulele generale:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P_1}\ , \qquad \vec{a}_1 = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{P_1} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{P_1}\right)\ ,$$

care se vor proiecta pe axele acestui sistem de referinţă. În condiţia de la punctul c), deci pentru $\lambda = 1$, rezultă:

$$\vec{v}_1 = R\omega_0 \vec{j} - R\omega_0\left(1+\cos\omega_0 t\right)\vec{k}\ ,$$

$$\vec{a}_1 = R\omega_0^2\left(1+\cos\omega_0 t+\cos^2\omega_0 t\right)\vec{i} + R\omega_0^2\left(1+\cos\omega_0 t\right)\sin\omega_0 t\ \vec{j} + 2R\omega_0^2 \sin\omega_0 t\ \vec{k}\ ,$$

$$v_1 = R\omega_0\sqrt{1+\left(1+\cos\omega_0 t\right)^2} \ ,$$

$$a_1 = R\omega_0^2\sqrt{10-\left(2-\cos\omega_0 t\right)^2} \ ,$$

astfel încât, la momentele t_k, viteza şi acceleraţia punctului P_1 devin:

$$\vec{v}_1\left(t_k\right) = R\omega_0\vec{j} \ , \quad \vec{a}_1\left(t_k\right) = -R\omega_0^2\vec{i} \ ,$$

având valori minime.

2.3.3. La un moment al mişcării tetraedrului regulat VABC cu muchiile de lungime ℓ, viteza vârfului său A are valoarea $v_A = 2\lambda\ell$, direcţia AV şi sensul spre V, viteza vârfului B este orientată după muchia AB cu sensul de la A spre B, iar viteza vârfului C este situată în planul feţei ABC.

a) Să se determine valorile vitezelor punctelor B şi C, precum şi unghiul α dintre viteza punctului C şi latura BC în planul feţei ABC.

b) Să se studieze distribuţia de viteze a tetraedrului la momentul considerat, determinând parametrii cinematici corespunzători, viteza de alunecare şi ecuaţiile axei instantanee faţă de sistemul de referinţă Oxyz legat de el, având originea în centrul bazei ABC, axa Ox după OC şi Oz după OV.

Răspunsuri

a) $v_B = \lambda\ell$, $v_C = \dfrac{\sqrt{21}}{3}\lambda\ell$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{5\sqrt{3}}{3} = 1{,}24\,\text{rad} = 71^\circ$.

b) $\vec{\omega} = -\dfrac{\lambda}{3}\left(2\sqrt{6}\ \vec{i} + 2\sqrt{2}\ \vec{j} + \sqrt{3}\ \vec{k}\right)$; $\vec{v}_O = \dfrac{\lambda\ell}{18}\left(-3\sqrt{3}\,\vec{i} + 21\,\vec{j} + 4\sqrt{6}\,\vec{k}\right)$;

$\vec{u} = \dfrac{2\lambda\ell}{35}\left(4\sqrt{3}\ \vec{i} + 4\ \vec{j} + \sqrt{6}\ \vec{k}\right)$;

$$\begin{cases} y - \dfrac{2\sqrt{6}}{3}z = \dfrac{83}{70}\ell \ , \\ x - 2\sqrt{2}z = \dfrac{197\sqrt{3}}{210}\ell \ , \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y - 1{,}63\,z = 1{,}2\ell \ , \\ x - 2{,}83\,z = 1{,}6\ell \ . \end{cases}$$

2.3.4. Piramida dreaptă VABCD, aflată în mişcare, are ca bază pătratul ABCD şi toate muchiile de lungime ℓ. La un moment al mişcării sale, vârful său A are viteza

de valoare $v_A = 2\lambda\ell$ orientată după muchia AV cu sensul spre V, viteza vârfului B este dirijată după muchia AB, iar viteza vârfului C este situată în planul bazei sale.

a) Să se exprime analitic vitezele punctelor B şi C față de sistemul de referință Oxyz legat de piramidă, având originea în centrul bazei sale şi axele de coordonate $Ox \parallel \overline{DA}$, $Oy \parallel \overline{AB}$, $Oz \parallel \overline{OV}$.

b) Să se studieze distribuția de viteze a piramidei la momentul considerat, determinând parametrii cinematici corespunzători, viteza de alunecare şi ecuațiile axei instantanee față de sistemul de referință legat de piramidă.

Răspunsuri

a) $\vec{v}_B = \lambda\ell\,\vec{j}$, $\vec{v}_C = 2\lambda\ell\,\vec{j}$.

b) $\vec{\omega} = -\lambda\left(\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{k}\right)$; $\vec{v}_O = \dfrac{\lambda\ell}{2}\left(-\vec{i} + 3\vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k}\right)$; $u = 0$;

$y = \dfrac{\ell}{2}$, $x - \sqrt{2}z = \dfrac{3\ell}{2}$.

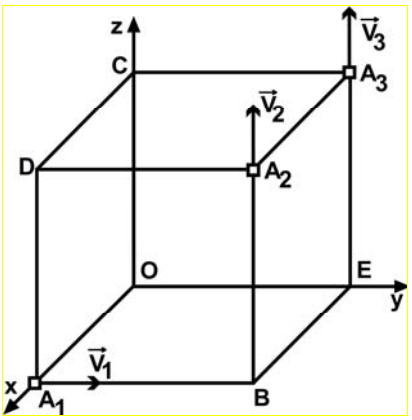


Fig. 2.3.5

2.3.5. La momentul $t_1 = \pi/2\ [s]$ al mişcării unui cub de muchie $\ell = 0{,}5m$ se ştie că vitezele $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ale vârfurilor sale A_1, A_2, respectiv A_3 sunt orientate după unele muchii ale sale, aşa cum sunt reprezentate în fig. 2.3.5.

a) Să se determine relațiile între valorile vitezelor considerate, din condiția ca acestea să verifice proprietățile generale ale distribuției de viteze a unui corp rigid.

b) Pentru $v_1 = v_2 = v_3 = 2\ m/s$, să se studieze distribuția de viteze a cubului la momentul t_1, determinând parametrii cinematici corespunzători, viteza de alunecare şi ecuațiile axei instantanee față de sistemul de referință Oxyz legat de cub, reprezentat în figură.

c) Ştiind că în tot timpul mişcării cubului, viteza vârfului său A_1 este dirijată după muchia A_1B şi că valoarea algebrică a acestei viteze, exprimată prin proiecția ei pe axa Oy, variază în timp după legea $v_1 = 2(\sin t + \cos t)\ [m/s]$, să se determine accelerația $\vec{a}_1$ a punctului A_1 la momentul t_1.

d) Dacă tot timpul mişcării cubului, vectorii viteză şi acceleraţie unghiulară sunt coliniari, să se studieze distribuţia de acceleraţii a cubului la momentul t_1, determinând parametrii cinematici corespunzători, acceleraţia de alunecare şi ecuaţiile axei instantanee faţă de sistemul de referinţă legat de cub. Care trebuie să fie mişcarea absolută a cubului în acest caz?

Răspunsuri

a) $v_1 = v_2 = v_3$.

b) $\vec{v}_O = 2\vec{j}\ \left[m/s\right]$; $\vec{\omega} = 4\vec{i}\ \left[Rad/s\right]$;
$u = 0$; $y = 0$, $z = \ell$.

c) $\vec{a}_1 = -2\vec{j} + 8\vec{k}\ \left[m/s^2\right]$.

d) $\vec{a}_O = -2\vec{j} + 8\vec{k}\ \left[m/s^2\right]$; $\vec{\varepsilon} = -4\vec{i}\ \left[Rad/s^2\right]$; $w = 0$; $y = 0$, $z = \ell$.
Mişcarea absolută a cubului trebuie să fie de rotaţie în jurul muchiei fixe CD cu viteza unghiulară $\vec{\omega} = 4(\sin t + \cos t)\vec{i}\ \left[Rad/s\right]$ şi acceleraţia unghiulară $\vec{\varepsilon} = 4(\cos t - \sin t)\vec{i}\ \left[Rad/s^2\right]$, timpul fiind măsurat în secunde.

2.3.6. – 11. În mişcarea unui corp rigid, se cunosc variaţiile în timp ale vitezelor punctelor sale P_1, P_2 şi P_3, exprimate prin proiecţii faţă de sistemul de referinţă Oxyz legat de rigid, după cum urmează:

2.3.6. $P_1(0,\ell,0)$, $\vec{v}_1 = \lambda\ell\sin\lambda t\,\vec{k}$; $P_2(\ell,\ell,\ell)$, $\vec{v}_2 = \lambda\ell\left(\vec{j} + \sin\lambda t\,\vec{k}\right)$;
$P_3(\ell,0,0)$, $\vec{v}_3 = \lambda\ell\left(\vec{i} + \vec{j} + \sin\lambda t\,\vec{k}\right)$;

2.3.7. $P_1(\ell,0,0)$, $\vec{v}_1 = \lambda\ell\left(\cos\lambda t\,\vec{i} + \vec{k}\right)$; $P_2(0,\ell,0)$,
$\vec{v}_2 = \lambda\ell\left(-\cos\lambda t\,\vec{j} + \vec{k}\right)$; $P_3(0,0,\ell)$, $\vec{v}_3 = \lambda\ell\left(\cos\lambda t\,\vec{i} - \cos\lambda t\,\vec{j} + \vec{k}\right)$;

2.3.8. $P_1(\ell,0,0)$, $\vec{v}_1 = \lambda\ell\left(\vec{j} + 2\sin\dfrac{\pi t}{2}\vec{k}\right)$; $P_2(\ell,\ell,\ell)$,
$\vec{v}_2 = \lambda\ell\left(-\vec{i} + \vec{j} + 2\sin\dfrac{\pi t}{2}\vec{k}\right)$; $P_3(0,\ell,0)$, $\vec{v}_3 = \lambda\ell\left(-\vec{i} + 2\sin\dfrac{\pi t}{2}\vec{k}\right)$;

2.3.9. $P_1(\ell,0,0)$, $\vec{v}_1 = -\lambda\ell\left(\vec{i} + \vec{k}\right)\cos\dfrac{\pi t}{3}$; $P_2(-\ell,0,0)$,
$\vec{v}_2 = \lambda\ell\left(-\vec{i} + \vec{k}\right)\cos\dfrac{\pi t}{3}$; $P_3(0,\ell,0)$, $\vec{v}_3 = -\lambda\ell\cos\dfrac{\pi t}{3}\vec{i}$;

2.3.10. $P_1(\ell,0,0)$, $\vec{v}_1 = -\lambda\ell\ln(2+\sin\lambda t)\vec{k}$; $P_2(0,\ell,0)$,
$\vec{v}_2 = \lambda\ell\ln(2+\sin\lambda t)\vec{k}$; $P_3(0,0,\ell)$, $\vec{v}_3 = \lambda\ell\left(\vec{i}-\vec{j}\right)\ln(2+\sin\lambda t)$;

2.3.11. $P_1(\ell,0,0)$, $\vec{v}_1 = \lambda\ell\ln(2+\cos\lambda t)\vec{i}$; $P_2(0,\ell,0)$,
$\vec{v}_2 = -\lambda\ell\ln(2+\cos\lambda t)\vec{j}$; $P_3(0,0,\ell)$, $\vec{v}_3 = \lambda\ell\left(\vec{i}-\vec{j}\right)\ln(2+\cos\lambda t)$;
unde timpul se măsoară în secunde şi λ este o constantă pozitivă dată. Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale rigidului la un moment t al mişcării sale, determinând parametrii cinematici corespunzători, viteza şi acceleraţia de alunecare, precum şi ecuaţiile axelor instantanee pentru distribuţiile de viteze şi de acceleraţii în raport cu sistemul de referinţă legat de rigid.

Răspunsuri

2.3.6. $\vec{\omega} = \lambda\vec{k}$; $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$; $\vec{v}_O = \lambda\ell\left(\vec{i}+\sin\lambda t\,\vec{k}\right)$; $\vec{a}_O = \lambda^2\ell\left(\vec{j}+\cos\lambda t\,\vec{k}\right)$;
$\vec{u} = \lambda\ell\sin\lambda t\,\vec{k}$; $\vec{w} = \lambda^2\ell\cos\lambda t\,\vec{k}$; $x = 0$, $y = \ell$.

2.3.7. $\vec{\omega} = \lambda\cos\lambda t\,\vec{k}$; $\vec{\varepsilon} = -\lambda^2\sin\lambda t\,\vec{k}$; $\vec{v}_O = \lambda\ell\left(\cos\lambda t\,\vec{i}-\cos\lambda t\,\vec{j}+\vec{k}\right)$;
$\vec{a}_O = \lambda^2\ell\left(\cos^2\lambda t-\sin\lambda t\right)\vec{i}+\lambda^2\ell\left(\cos^2\lambda t+\sin\lambda t\right)\vec{j}$; $\vec{u} = \lambda\ell\vec{k}$;
$w = 0$; $x = y = -\ell$.

2.3.8. $\vec{\omega} = \lambda\vec{k}$; $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$; $\vec{v}_O = \vec{u} = 2\lambda\ell\sin\frac{\pi t}{2}\vec{k}$; $\vec{a}_O = \vec{w} = \pi\lambda\ell\cos\frac{\pi t}{2}\vec{k}$;
$x = y = 0$.

2.3.9. $\vec{\omega} = \lambda\cos\frac{\pi t}{3}\vec{j}$; $\vec{\varepsilon} = -\frac{\pi\lambda}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\vec{j}$; $\vec{v}_O = -\lambda\ell\cos\frac{\pi t}{3}\vec{i}$;
$\vec{a}_O = \frac{\pi\lambda\ell}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\vec{i}+\lambda^2\ell\cos^2\frac{\pi t}{3}\vec{k}$; $u = w = 0$; $x = 0$, $z = \ell$.

2.3.10. $\vec{\omega} = \lambda\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\ln(2+\sin\lambda t)$; $\vec{\varepsilon} = \frac{\lambda^2\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\cos\lambda t}{2+\sin\lambda t}$; $\vec{v}_O = \vec{a}_O = 0$;
$u = w = 0$; $x = y$, $z = 0$.

2.3.11. $\vec{\omega} = \lambda \ln(2+\cos\lambda t)\vec{k}$; $\vec{\varepsilon} = -\dfrac{\lambda^2 \sin\lambda t}{2+\cos\lambda t}\vec{k}$;

$\vec{v}_O = \lambda\ell(\vec{i} - \vec{j})\ln(2+\cos\lambda t)$;

$\vec{a}_O = \lambda^2\ell\left(-\dfrac{\sin\lambda t}{2+\cos\lambda t} + \ln^2(2+\cos\lambda t)\right)\vec{i} + \lambda^2\ell\left(\dfrac{\sin\lambda t}{2+\cos\lambda t} + \ln^2(2+\cos\lambda t)\right)\vec{j}$;

$u = w = 0$; $x = y = \ell$.

2.3.12. Un corp rigid are o mişcare de rototranslaţie în raport cu axa fixă O_1z_1, fiind pus în mişcare de un şurub legat de rigid, care se mişcă într-o piuliţă fixă. Se cunosc raza medie R a filetului şurubului, unghiul său de pantă $\alpha = \pi/6$ şi valoarea, constantă în timp, a vitezei unui punct A al filetului şurubului $v_A = 2\sqrt{3}\lambda R/3$. Considerând sistemul de referinţă Oxyz legat de rigid cu axa Oz, legată de axa şurubului, aflată în mişcare pe O_1z_1 şi cu axa Ox trecând prin A, să se determine:

a) ecuaţia locului geometric al punctelor rigidului, care au unghiul dintre vitezele lor şi planul perpendicular pe axa şurubului de valoare $\pi/3$;

b) ecuaţia locului geometric al punctelor rigidului, care au vitezele perpendiculare pe viteza punctului A;

c) ecuaţia locului geometric al punctelor rigidului, ale căror acceleraţii formează unghiul α cu acceleraţia punctului A.

Răspunsuri

a) $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{R}{3}\right)^2$;

b) $x = -\dfrac{R}{3}$;

c) $x = \pm\sqrt{3}y$.

2.3.13. Un corp rigid cu punctul fix O are o mişcare de precesie regulată, în care unghiurile lui Euler au expresiile:

$$\psi = \lambda t \ , \quad \theta = \frac{\pi}{2} \ , \quad \varphi = 2\lambda t \ ,$$

λ fiind o constantă pozitivă cunoscută.

a) Să se determine vectorii viteză şi acceleraţie unghiulară ai rigidului la un moment t al mişcării sale.

b) Să se calculeze vitezele şi acceleraţiile punctelor $P_1(\ell,0,0)$ şi $P_2(0,\ell,0)$ din rigid la un moment t al mişcării sale.

c) Să se determine ecuaţiile axoidelor mişcării rigidului, precum şi ecuaţiile centroidelor generate de punctul Q al axei instantanee, situat la distanţa $OQ = \sqrt{5}\ell$ de O.

Răspunsuri

a) $\vec{\omega} = \lambda\left(\sin 2\lambda t\,\vec{i} + \cos 2\lambda t\,\vec{j} + 2\vec{k}\right)$; $\vec{\varepsilon} = 2\lambda^2\left(\cos 2\lambda t\,\vec{i} - \sin 2\lambda t\,\vec{j}\right)$.

b) $\vec{v}_1 = \lambda\ell\left(2\vec{j} - \cos 2\lambda t\,\vec{k}\right)$; $\vec{v}_2 = \lambda\ell\left(-2\,\vec{i} + \sin 2\lambda t\,\vec{k}\right)$;
$\vec{a}_1 = \lambda^2\ell\left(-\left(4 + \cos^2 2\lambda t\right)\vec{i} + \sin 2\lambda t\cos 2\lambda t\,\vec{j} + 4\sin 2\lambda t\,\vec{k}\right)$;
$\vec{a}_2 = \lambda^2\ell\left(\sin 2\lambda t\cos 2\lambda t\,\vec{i} - \left(4 + \sin^2 2\lambda t\right)\vec{j} + 4\sin 2\lambda t\,\vec{k}\right)$.

c) (AM) $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$; (AF) $x_1^2 + y_1^2 = \left(2z_1\right)^2$;
(CM) $x^2 + y^2 = \ell^2$, $z = \pm 2\ell$; (CF) $x_1^2 + y_1^2 = (2\ell)^2$, $z_1 = \pm\ell$.

2.3.14. a) Să se determine vectorii viteză şi acceleraţie unghiulară ai unui corp rigid, ştiind că, la un moment t al mişcării sale, viteza şi acceleraţia originii sistemului de referinţă Oxyz legat de rigid se exprimă prin:

$$\vec{v}_O = \lambda R\left(-\sin\lambda t\,\vec{i} + \cos\lambda t\,\vec{j}\right), \quad \vec{a}_O = -\lambda^2 R\left(\cos\lambda t\,\vec{i} + \sin\lambda t\,\vec{j}\right),$$

unde λ şi R sunt constante pozitive cunoscute.

b) Alegând sistemul de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ astfel încât, la momentul iniţial $t_0 = 0$, coordonatele punctului O să fie $x_{1O} = R$, $y_{1O} = z_{1O} = 0$, să se determine legea de mişcare, traiectoria, viteza şi acceleraţia unui punct $P(x, y, z)$ din rigid.

Răspunsuri

a) $\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} = \vec{0}$.

b) $x_1 = x + R\cos\lambda t$, $y_1 = y + R\sin\lambda t$, $z_1 = z$;

$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = R^2$, $z_1 = z$;

$v = v_O = \lambda R$; $a = a_O = \lambda^2 R$.

2.3.15. Ştiind că originea sistemului de referinţă Oxyz, legat de un rigid aflat în mişcare, se mişcă uniform pe prima bisectoare a planului fix $O_1y_1z_1$ cu viteza de valoare $v_O = \sqrt{2}\lambda\ell$ şi că, în acelaşi timp, rigidul se roteşte uniform în jurul axei Oz, paralelă cu O_1z_1, cu viteza unghiulară de valoare $\omega = \lambda$, să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale rigidului, determinând parametrii cinematici corespunzători, viteza şi acceleraţia de alunecare, precum şi axele instantanee pentru distribuţia de viteze (Δ'), respectiv pentru cea de acceleraţii (Δ'').

Răspunsuri

$\vec{\omega} = \lambda\vec{k} = \lambda\vec{k}_1$; $\vec{v}_O = \lambda\ell\left(\vec{j}_1 + \vec{k}_1\right)$; $\vec{u} = \lambda\ell\vec{k}_1$; $\vec{\varepsilon} = \vec{a}_O = \vec{w} = \vec{0}$;

(Δ') $x_1 = -\ell$, $y_1 = z_1$;

(Δ'') $x_1 = 0$, $y_1 = z_1$.

2.3.16. La orice moment t al mişcării unui corp rigid, proiecţiile pe axele sistemului de referinţă Oxyz legat de rigid ale vitezei originii sale şi unghiurile lui Euler au expresiile:

$$v_{O_x} = \lambda R\sin 4\lambda t \ , \quad v_{O_y} = \lambda R\cos 4\lambda t \ , \quad v_{O_z} = 0 \ ;$$

$$\psi = 3\lambda t \ , \quad \theta = \frac{\pi}{2} \ , \quad \varphi = 4\lambda t \ ,$$

în care R şi λ sunt constante pozitive cunoscute.

a) Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale rigidului, determinând parametrii cinematici corespunzători, viteza de alunecare, ecuaţiile axei instantanee de rototranslaţie pentru distribuţia de viteze faţă de sistemul de referinţă Oxyz, precum şi polul acceleraţiilor.

b) Care trebuie să fie mişcarea absolută a punctului O?

c) Să se calculeze viteza şi acceleraţia punctului $A(R, 0, 0)$ din rigid la un moment t şi la momentul $t_1 = \pi/8\lambda$.

Răspunsuri

a) $\vec{\omega} = 3\lambda\left(\sin 4\lambda t\,\vec{i} + \cos 4\lambda t\,\vec{j}\right) + 4\lambda\,\vec{k}$; $\vec{\varepsilon} = 12\lambda^2\left(\cos 4\lambda t\,\vec{i} - \sin 4\lambda t\,\vec{j}\right)$;

$\vec{a}_O = 0$; $\vec{u} = \dfrac{3\lambda R}{25}\left(3\sin 4\lambda t\,\vec{i} + 3\cos 4\lambda t\,\vec{j} + 4\vec{k}\right)$;

$100x - 75z\sin 4\lambda t + 16R\cos 4\lambda t = 0$, $25x\cos 4\lambda t - 25y\sin 4\lambda t + 4R = 0$; $J \equiv 0$.

b) $v_O = \lambda R$,

$a_O = 0$.

c) $\vec{v}_A(t) = \lambda R\left(\sin 4\lambda t\,\vec{i} + (4 + \cos 4\lambda t)\,\vec{j} - 3\cos 4\lambda t\,\vec{k}\right)$, $\vec{v}_A(t_1) = \lambda R\left(\vec{i} + 4\vec{j}\right)$;

$\vec{a}_A = \lambda^2 R\left(-\left(16 + 9\cos^2 4\lambda t\right)\vec{i} + \dfrac{9}{2}\sin 8\lambda t\,\vec{j} + 24\sin 4\lambda t\,\vec{k}\right)$,

$\vec{a}_A(t_1) = 8\lambda^2 R\left(-2\vec{i} + 3\vec{k}\right)$.

2.3.17. Bara OA, de lungime 3R, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, astfel încât capătul său O are o mişcare circulară uniformă ca în fig. 2.3.17, raza traiectoriei $O_1O = R$ şi valoarea v_O a vitezei sale fiind cunoscute, iar tot timpul mişcării sale bara trece prin manşonul articulat în $B(R, 0)$.

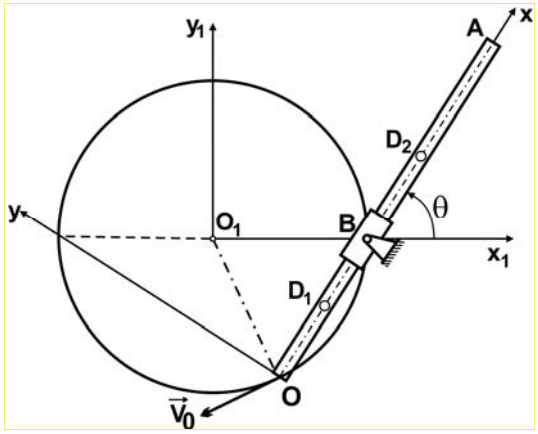


Fig. 2.3.17

a) Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale barei la un moment t al mişcării sale, când unghiul dintre axa Ox legată de ea şi axa O_1x_1 are valoarea $\theta(t)$, determinând parametrii cinematici corespunzători, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor.

b) Să se determine baza şi rulanta în mişcarea plană a barei.

c) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor D_1, D_2 şi $D_3 \equiv A$ de pe bară ($OD_1 = D_1D_2 = D_2D_3$) la momentul în care unghiul θ are valoarea $\pi/6$.

Răspunsuri

a) $\omega = \dfrac{v_O}{2R}$; $\varepsilon = 0$;

$OI = 2O_1I = 2R$; $OJ = 4R$, $O_1J = 3R$.

b) $x_1^2 + y_1^2 = R^2$;

$x^2 + y^2 = (2R)^2$.

c) $v_1 = \dfrac{v_O}{2}\sqrt{5-\sqrt{3}} = 0{,}9v_O$, $v_2 = v_O\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}52v_O$,

$v_3 = \dfrac{v_O}{2}\sqrt{13-6\sqrt{3}} = 0{,}81v_O$;

$a_1 = \dfrac{v_O^2}{4R}\sqrt{17-4\sqrt{3}} = 0{,}915\dfrac{v_O^2}{R}$, $a_2 = \dfrac{v_O^2}{2R}\sqrt{5-2\sqrt{3}} = 0{,}62\dfrac{v_O^2}{R}$,

$a_3 = \dfrac{v_O^2}{4R}\sqrt{25-12\sqrt{3}} = 0{,}513\dfrac{v_O^2}{R}$.

2.3.18. Bara OA se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ ca în fig. 2.3.18, astfel încât capătul său O are o mişcare rectilinie şi uniformă pe axa O_1x_1 cu viteza de valoare v_O cunoscută şi tot timpul mişcării se sprijină pe muchia B a unui prag de înălţime $O_1B = h$ dată.

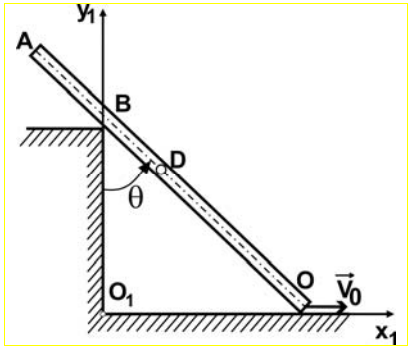


Fig. 2.3.18

a) Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale barei la un moment t al mişcării sale, când unghiul dintre axa Oy legată de ea şi axa O_1y_1 are valoarea $\theta(t)$, determinând parametrii cinematici corespunzători, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor.

b) Să se determine baza şi rulanta în mişcarea plană a barei.

c) Să se calculeze valorile vitezei şi acceleraţiei punctului D de pe bară ($OD = h$) la momentul în care θ are valoarea $\pi/3$.

Răspunsuri

a) $\omega = \frac{v_O}{h}\cos^2\theta$; $\varepsilon = -\frac{v_O^2}{h^2}\sin\theta\cos^3\theta$;

$x_{1I} = h\mathrm{tg}\theta$, $y_{1I} = \frac{h}{\cos^2\theta}$; $J \equiv 0$.

b) $\frac{y_1}{h} = \frac{x_1^2}{h^2} + 1$; $x = y\sqrt{\frac{y^2}{h^2} - 1}$, $y > h$.

c) $v_D = \frac{\sqrt{13}}{4}v_O = 0{,}9v_O$; $a_D = \frac{1}{8}\frac{v_O^2}{h} = 0{,}125\frac{v_O^2}{h}$.

2.3.19. Bara OA se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ ca în fig. 2.3.19, astfel încât capătul său O are o mişcare rectilinie şi uniformă pe axa O_1x_1 cu viteza de valoare v_O cunoscută şi tot timpul mişcării se sprijină pe periferia unui disc semicircular de rază R, cu centrul în O_1 şi cu diametrul după axa O_1x_1.

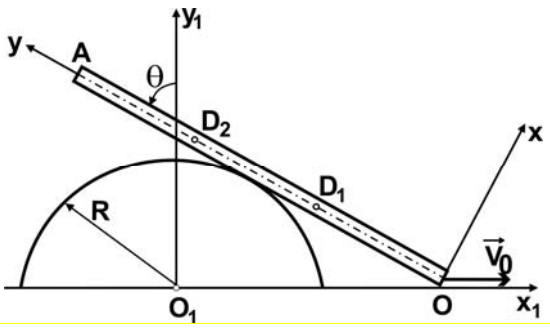


Fig. 2.3.19

a) Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale barei la un moment t al mişcării sale, când unghiul dintre axa Oy legată de ea şi axa O_1y_1 are valoarea $\theta(t)$, determinând parametrii cinematici corespunzători, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor.

b) Să se determine ecuaţiile centroidelor în mişcarea plană a barei.

c) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor D_1 şi D_2 de pe bară ($OD_1 = D_1D_2 = R$) la momentul în care unghiul θ are valoarea $\pi/4$.

Răspunsuri

a) $\omega = \frac{v_O}{R}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$; $\varepsilon = -\frac{v_O^2}{R^2}\frac{\left(1+\sin^2\theta\right)\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$,

$$x_{1I} = \frac{R}{\cos\theta} \ , \quad y_{1I} = \frac{R\sin\theta}{\cos^2\theta} \ ; \quad J \equiv 0 \ .$$

b) $y_1 = x_1\sqrt{\frac{x_1^2}{R^2} - 1}$, $x_1 > R$; $\frac{x}{R} = \frac{y^2}{R^2}$.

c) $v_1 = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{2} v_O = 0{,}89 v_O$, $v_2 = \frac{\sqrt{12-4\sqrt{2}}}{2} v_O = 1{,}26 v_O$;

$a_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}\frac{v_O^2}{R} = 1{,}58\frac{v_O^2}{R}$, $a_2 = \sqrt{10}\frac{v_O^2}{R} = 3{,}16\frac{v_O^2}{R}$.

2.3.20. Un disc circular cu centrul O şi de rază R se rostogoleşte fără alunecare în planul fix $O_1x_1y_1$ pe cercul cu centrul în O_1 şi de rază 3R, în exteriorul acestuia, astfel încât unghiul dintre dreapta O_1O şi axa O_1x_1 variază în timp după legea $\theta_1 = \lambda t$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută.

a) Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale discului la un moment t al mişcării sale, determinând parametrii cinematici corespunzători, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor.

b) Să se determine baza şi rulanta în mişcarea plană a discului.

c) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor A_1, A_2, A_3 şi A_4 de pe periferia discului, pentru care diametrele A_1A_3 şi A_2A_4 sunt perpendiculare între ele, A_1 fiind punctul de tangenţă dintre disc şi cerc la un moment t al mişcării.

Răspunsuri

a) $\omega = 4\lambda$, $\varepsilon = 0$; $IO_1 = 3IO = 3R$; $JO_1 = \frac{15R}{4}$, $JO = \frac{R}{4}$.

b) $x_1^2 + y_1^2 = (3R)^2$; $x^2 + y^2 = R^2$.

c) $v_1 = 0$, $v_2 = v_4 = 4\sqrt{2}\lambda R$, $v_3 = 8\lambda R$;

$a_1 = 12\lambda^2 R$, $a_2 = a_4 = 4\sqrt{17}\lambda^2 R = 16{,}5\lambda^2 R$, $a_3 = 20\lambda^2 R$.

2.3.21. Un disc circular cu centrul O şi de rază R se rostogoleşte fără alunecare în planul fix $O_1x_1y_1$ pe cercul cu centrul în O_1 şi de rază 3R, în interiorul

acestuia, astfel încât unghiul dintre dreapta O_1O şi axa O_1x_1 variază în timp după legea $\theta_1 = \lambda t$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută.

a) Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale discului la un moment t al mişcării sale, determinând parametrii cinematici corespunzători, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor.

b) Să se determine baza şi rulanta în mişcarea plană a discului.

c) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor A_1, A_2, A_3 şi A_4 de pe periferia discului, pentru care diametrele A_1A_3 şi A_2A_4 sunt perpendiculare între ele, A_1 fiind punctul de tangenţă dintre disc şi cerc la un moment t al mişcării discului.

Răspunsuri

a) $\omega = 2\lambda$, $\varepsilon = 0$;

$IO_1 = 3IO = 3R$; $JO_1 = \dfrac{3R}{2}$, $JO = \dfrac{R}{2}$.

b) $x_1^2 + y_1^2 = (3R)^2$; $x^2 + y^2 = R^2$.

c) $v_1 = 0$, $v_2 = v_4 = 2\sqrt{2}\lambda R$, $v_3 = 4\lambda R$;

$a_1 = 6\lambda^2 R$, $a_2 = a_4 = 2\sqrt{5}\lambda^2 R = 4{,}5\lambda^2 R$, $a_3 = 2\lambda^2 R$.

2.3.22. Un troliu cu centrul O şi cu razele tamburilor R, respectiv 2R, se rostogoleşte fără alunecare în planul fix $O_1x_1y_1$ pe axa O_1x_1 , fiind pus în mişcare printr-un fir înfăşurat pe tamburul de rază R al troliului, al cărui capăt A se mişcă pe o dreaptă paralelă cu axa O_1x_1. Pentru $R = 0{,}2$ m şi ştiind că, la un moment dat al mişcării troliului, capătul A al firului are viteza şi acceleraţia de valori $v_A = 1{,}5$ m/s, respectiv $a_A = 3{,}75$ m/s^2 , orientate ca în fig. 2.3.22, să se determine:

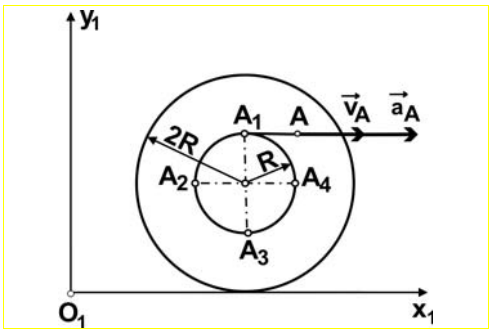


Fig. 2.3.22

a) parametrii cinematici pentru studiul distribuţiilor de viteze şi de acceleraţii ale troliului la momentul considerat, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor;

b) valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor A_1, A_2, A_3 şi A_4 de pe periferia tamburului de rază R al troliului, pentru care, la momentul considerat, diametrul A_1A_3 este paralel cu axa O_1y_1, iar diametrul A_2A_4 este paralel cu axa O_1x_1;

c) viteza polului acceleraţiilor şi acceleraţia centrului instantaneu de rotaţie, exprimate prin proiecţii faţă de sistemul de referinţă fix.

Răspunsuri

a) $\vec{\omega} = -2{,}5\vec{k}_1\,[\text{Rad/s}]$; $\vec{\varepsilon} = -6{,}25\vec{k}_1\,[\text{Rad/s}^2]$; $v_O = 1\ \text{m/s}$;
$a_O = 2{,}5\ \text{m/s}^2$; $\overline{OI} = -2R\,\vec{j}_1$; $\overline{OJ} = R\left(\vec{i}_1 - \vec{j}_1\right)$;

b) $v_1 = 1{,}5\ \text{m/s}$, $v_2 = v_4 = 0{,}5\sqrt{5} = 1{,}12\ \text{m/s}$, $v_3 = 0{,}5\ \text{m/s}$;
$a_1 = a_2 = 1{,}25\sqrt{10} = 3{,}95\ \text{m/s}^2$, $a_3 = a_4 = 1{,}25\sqrt{2} = 1{,}75\ \text{m/s}^2$;

c) $\vec{v}_J = 0{,}5\left(\vec{i}_1 - \vec{j}_1\right)\ [\text{m/s}]$; $\vec{a}_I = 2{,}5\,\vec{j}_1\,[\text{m/s}^2]$.

2.3.23. Bara AOB de lungime 2ℓ, îndoită în unghi drept la mijlocul său O, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, astfel încât punctul A are o mişcare rectilinie şi uniformă pe axa O_1y_1 ca în fig. 2.3.23, valoarea v_A a vitezei sale fiind cunoscută, iar latura OB trece prin manşonul articulat în punctul B de pe axa O_1x_1, pentru care $O_1D = \ell$.

a) Să se studieze distribuţiile de viteze şi de acceleraţii ale barei la un moment t al mişcării sale, când unghiul dintre axa Ox legată de latura OB a barei şi axa O_1x_1 are valoarea $\theta(t)$, determinând viteza unghiulară, acceleraţia unghiulară, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor.

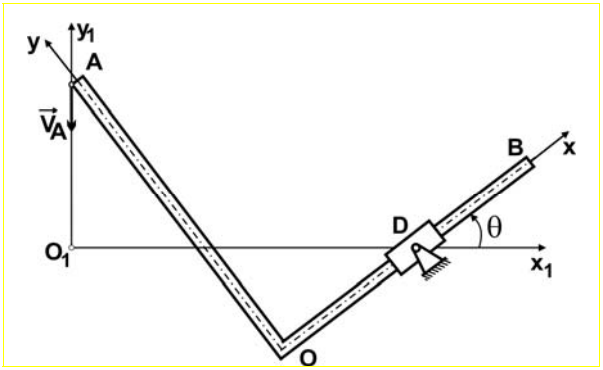


Fig. 2.3.23

b) Să se determine baza şi rulanta în mişcarea plană a barei.

c) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor O şi B ale barei la momentul în care $\theta = \pi/6$.

Răspunsuri

a) $\omega = \frac{v_A}{\ell}(1+\sin\theta)$; $\varepsilon = \frac{v_A^2}{\ell^2}(1+\sin\theta)\cos\theta$; $IA = ID = \frac{\ell}{1+\sin\theta}$; $J \equiv A$.

b) $y_1^2 + \ell^2 = 2\ell x_1$, $x^2 + \ell^2 = 2\ell y$.

c) $v_O = \frac{\sqrt{7}}{2} v_A = 1{,}32 v_A$, $v_B = \frac{\sqrt{16-6\sqrt{3}}}{2} v_A = 1{,}185 v_A$;

$a_O = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{v_A^2}{\ell} = 2{,}6\frac{v_A^2}{\ell}$, $a_B = \frac{3\sqrt{6}}{2}\frac{v_A^2}{\ell} = 3{,}675\frac{v_A^2}{\ell}$.

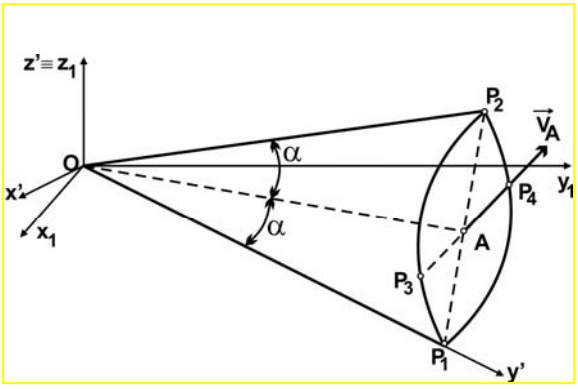


Fig. 2.3.24

2.3.24. Un con circular drept cu raza bazei de lungime R şi unghiul la vârf 2α se rostogoleşte fără alunecare pe planul fix Ox_1y_1, astfel încât centrul A al bazei sale are viteza de valoare constantă $v_A = \lambda R$, orientată ca în fig. 2.3.24. În raport cu sistemul de referinţă $Ox'y'z'$, având axele $Oz' \equiv Oz_1$ şi Oy' după dreapta OP_1, P_1 fiind punctul de contact al bazei conului cu planul Ox_1y_1, să se determine:

a) viteza şi acceleraţia unghiulară a conului;

b) vitezele şi acceleraţiile punctelor P_1, P_2, P_3 şi P_4 de pe circumferinţa bazei conului, pentru care diametrele P_1P_2 şi P_3P_4 sunt perpendiculare între ele.

Răspunsuri

a) $\vec{\omega} = -\frac{\lambda}{\cos\alpha}\vec{j}'$; $\vec{\varepsilon} = \frac{\lambda^2 \sin\alpha}{\cos^3\alpha}\vec{i}'$;

b) $\vec{v}_1 = \vec{0}$, $\vec{v}_2 = -2\lambda R\,\vec{i}'$, $\vec{v}_3 = \dfrac{\lambda R}{\cos\alpha}\left(-\cos\alpha\,\vec{i}' + \vec{k}'\right)$,

$\vec{v}_4 = -\dfrac{\lambda R}{\cos\alpha}\left(-\cos\alpha\,\vec{i}' + \vec{k}'\right)$; $\vec{a}_1 = \dfrac{\lambda^2 R}{\cos^3\alpha}\vec{k}'$,

$\vec{a}_2 = -\dfrac{\lambda^2 R}{\cos^3\alpha}\left(\sin 2\alpha\,\vec{j}' + \vec{k}'\right)$, $\vec{a}_3 = -\dfrac{\lambda^2 R}{\cos^2\alpha}\left(\vec{i}' + \sin\alpha\,\vec{j}'\right)$,

$\vec{a}_4 = \dfrac{\lambda^2 R}{\cos^2\alpha}\left(\vec{i}' - \sin\alpha\,\vec{j}'\right)$.

2.3.25. Un corp rigid cu punctul fix O, situat pe axa fixă O_1z_1 la distanța $OO_1 = R$, este realizat prin sudarea barei OA de lungime h în centrul A al unui disc circular de rază R, în poziția în care bara este perpendiculară pe planul discului. Discul se rostogolește fără alunecare pe planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât viteza punctului A are valoarea constantă $v_A = \lambda R$ şi este orientată ca în fig. 2.3.25. În raport cu sistemul de referință $Ox'y'z'$, având axele $Oz' \equiv O_1z_1$ şi Oy' după axa barei, să se determine:

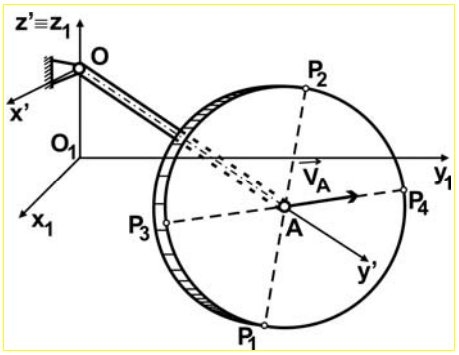


Fig. 2.3.25

a) viteza şi accelerația unghiulară a rigidului;

b) vitezele şi accelerațiile punctelor P_1, P_2, P_3 şi P_4 de pe periferia discului, pentru care diametrele P_1P_2 şi P_3P_4 sunt perpendiculare între ele, P_1 fiind punctul de contact al discului cu planul fix pe care se rostogolește.

Răspunsuri

a) $\vec{\omega} = -\lambda\,\vec{j}' + \dfrac{\lambda R}{h}\vec{k}'$; $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\lambda^2 R}{h}\vec{i}'$;

b) $\vec{v}_1 = \vec{0}$, $\vec{v}_2 = -2\lambda R\,\vec{i}'$, $\vec{v}_3 = \lambda R\left(-\vec{i}' + \dfrac{R}{h}\vec{j}' + \vec{k}'\right)$,

$\vec{v}_4 = -\lambda R\left(\vec{i}' + \dfrac{R}{h}\vec{j}' + \vec{k}'\right)$;

$$\vec{a}_1 = \lambda^2 R\left(\frac{R}{h}\vec{j}' + \vec{k}'\right), \quad \vec{a}_2 = -\lambda^2 R\left(\frac{3R}{h}\vec{j}' + \vec{k}'\right),$$

$$\vec{a}_3 = -\lambda^2 R\left(\frac{h^2+R^2}{h^2}\vec{i}' + \frac{R}{h}\vec{j}'\right), \quad \vec{a}_4 = \lambda^2 R\left(\frac{h^2+R^2}{h^2}\vec{i}' - \frac{R}{h}\vec{j}'\right).$$

2.4. Cinematica mecanismelor plane

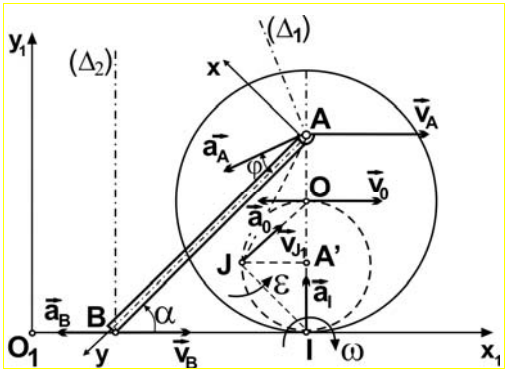


Fig. 2.4.1.1)

2.4.1. Discul circular cu centrul O şi de rază 2R se rostogoleşte fără alunecare în planul fix $O_1x_1y_1$ pe axa O_1x_1. În punctul A al discului, situat la distanţa R de O, este articulat un capăt al barei AB de lungime 5R, iar celălalt capăt se mişcă pe axa O_1x_1. La un moment t_1 al mişcării mecanismului, în care se cunosc:

$$\overrightarrow{OA} = R\vec{j}_1,$$

$$\vec{v}_O = 2\lambda R\vec{i}_1, \quad \vec{a}_O = -2\lambda^2 R\vec{i}_1,$$

unde λ este o constantă pozitivă dată, să se determine:

a) viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară a discului;

b) viteza şi acceleraţia punctului A, acceleraţia centrului instantaneu de rotaţie şi viteza polului acceleraţiilor pentru disc;

c) viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară a barei;

d) viteza şi acceleraţia punctului B.

Rezolvare

Metoda I. a) Din fig. 2.4.1.1) şi din enunţ rezultă imediat:

$$\vec{v}_O = \vec{\omega}\times\overrightarrow{IO} = -2R\omega\vec{i}_1 = 2\lambda R\vec{i}_1, \ \omega = -\lambda < 0,$$

$$\vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = -2R\dot{\omega}\vec{i}_1 = -2\lambda^2 R\vec{i}_1, \ \varepsilon = \dot{\omega} = \lambda^2 > 0.$$

b) Cunoscând parametrii cinematici pentru studiul distribuțiilor de viteze şi de accelerații ale discului la momentul t_1 al mişcării mecanismului, se pot determina viteza şi accelerația punctului A şi accelerația centrului instantaneu de rotație pe baza formulelor generale:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\overrightarrow{OA} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{IA} = 3\lambda R\vec{i}_1,$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{OA} - \omega^2\overrightarrow{OA} = -\lambda^2 R\left(3\vec{i}_1 + \vec{j}_1\right),$$
$$\vec{a}_I = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{OI} - \omega^2\overrightarrow{OI} = 2\lambda^2 R\vec{j}_1.$$

Pentru determinarea vitezei polului accelerațiilor este necesar, în primul rând, să se afle poziția acestuia la momentul considerat. Ca urmare, se calculează unghiul φ dintre accelerația oricărui punct al discului şi dreapta ce uneşte acel punct cu polul accelerațiilor:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2} = 1\ , \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}\ ,$$

precum şi distanța de la O la polul accelerațiilor:

$$OJ = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2\lambda^2 R}{\sqrt{2}\lambda^2} = \sqrt{2}R\ ,$$

de unde rezultă imediat poziția punctului J, aşa cum se arată în fig. 2.4.1.1). În această figură s-a reprezentat cu linie întreruptă şi cercul inflexiunilor pentru disc, care are centrul în A′, la mijlocul diametrului său OI. Acum se poate calcula şi viteza polului accelerațiilor la momentul considerat:

$$\vec{v}_J = \vec{\omega}\times\overrightarrow{IJ} = \lambda R\left(\vec{i}_1 + \vec{j}_1\right).$$

c) Punctul B având o mişcare rectilinie după axa O_1x_1, viteza sa va fi paralelă cu viteza celuilalt capăt A al barei la momentul t_1, astfel încât, la momentul considerat, viteza unghiulară ω_1 a barei trebuie să fie nulă, deoarece perpendicularele pe aceste viteze în punctele respective sunt, de asemenea, paralele între ele şi nu se pot intersecta. Pentru determinarea accelerației unghiulare ε_1 a barei, se calculează accelerația punctului B în funcție de accelerația cunoscută a punctului A şi se pune condiția ca aceasta să fie dirijată după axa O_1x_1, astfel încât rezultă:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_1\times\overrightarrow{AB} - \omega_1^2\overrightarrow{AB} = 3R\left(\varepsilon_1 - \lambda^2\right)\vec{i}_1 - R\left(4\varepsilon_1 + \lambda^2\right)\vec{j}_1\ , \qquad \varepsilon_1 = -\frac{\lambda^2}{4}\ .$$

d) Deoarece $\omega_1 = 0$, vitezele tuturor punctelor de pe bară sunt egale ca vectori, iar după determinarea accelerației unghiulare ε_1 se pot determina accelerațiile tuturor punctelor de pe bară, astfel încât se obțin elementele cerute în enunț:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = 3\lambda R\vec{i}_1 ,$$
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_1 \times \overrightarrow{AB} = -\frac{15}{4}\lambda^2 R\vec{i}_1 .$$

Dacă s-ar cere studiul distribuției de accelerații a barei al momentul t_1, ar fi necesar să se determine poziția polului accelerațiilor J_1 şi unghiul φ_1 dintre accelerația oricărui punct al barei şi dreapta ce uneşte acel punct cu J_1. Deoarece $\omega_1 = 0$, rezultă $\varphi_1 = \pm\pi/2$, deci poziția lui J_1 se poate determina grafic, ca intersecția dreptelor (Δ_1) perpendiculară pe accelerația lui A şi (Δ_2) perpendiculară pe O_1x_1, aşa cum este indicat în fig. 2.4.1.1).

După determinarea vitezei unghiulare ω_1 a barei, se mai pot determina accelerația unghiulară ε_1 şi valoarea a_B a accelerației punctului B la momentul t_1, direcția ei fiind cunoscută, dacă se calculează accelerația relativă a lui B față de A:

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = \vec{\varepsilon}_1 \times \overrightarrow{AB} - \omega_1^2 \overrightarrow{AB} = \vec{\varepsilon}_1 \times \overrightarrow{AB} ,$$

care se proiectează pe direcția AB şi pe direcția perpendiculară:

$$a_B \cos\alpha - 3\lambda^2 R\cos\alpha - \lambda^2 R\sin\alpha = 0 ,$$
$$a_B \sin\alpha - 3\lambda^2 R\sin\alpha + \lambda^2 R\cos\alpha = -5R\varepsilon_1 .$$

de unde rezultă:

$$a_B = 3\lambda^2 R + \lambda^2 R\frac{3}{4} = \frac{15}{4}\lambda^2 R , \qquad \varepsilon_1 = -\frac{\lambda^2}{5}\left(\frac{15}{4}\frac{3}{5} - \frac{9}{5} + \frac{4}{5}\right) = -\frac{\lambda^2}{4} .$$

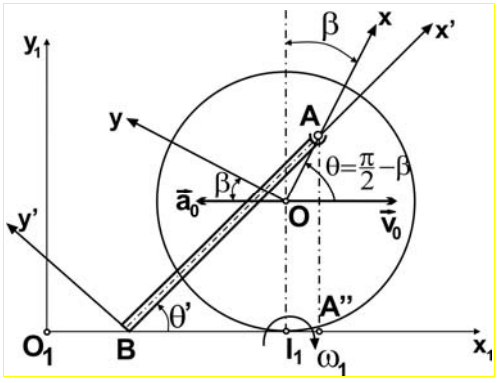


Fig. 2.4.1.2)

Metoda II. Pentru determinarea vitezelor unghiulare şi a accelerațiilor unghiulare ale celor două corpuri la momentul t_1, se poate studia mişcarea mecanismului după momentul t_1 în funcție de un parametru de poziție ales convenabil, după care se particularizează pentru valoarea acestui parametru la momentul t_1. Considerând ca parametru de poziție al mecanismului unghiul β dintre axa Ox legată de disc ce trece prin A şi direcția pozitivă a axei O_1y_1, care la momentul t_1 este nul, se pot alege sistemele de referință Oxy legat de disc şi Bx′y′ legat de bară ca în fig. 2.4.1.2), pentru care se pot exprima uşor parametrii de poziție în funcție de β. După determinarea acestor elemente ale mişcării mecanismului, ceruta la punctele a) şi c), calculul vitezelor şi accelerațiilor oricăror puncte ale sale se face la fel ca prin metoda precedentă.

a) Deoarece la orice moment t al mişcării mecanismului, poziția centrului instantaneu de rotație I al discului este cunoscută, din fig. 2.4.1.2) rezultă imediat:

$$\theta(t)=\frac{\pi}{2}-\beta(t)\ ,\quad \omega(t)=-\dot\beta(t)\ ,\quad \varepsilon(t)=-\ddot\beta(t)\ ,$$
$$\vec v_O(t)=2R\dot\beta(t)\vec i_1\ ,\quad \vec a_O(t)=2R\ddot\beta(t)\vec i_1\ ,$$
$$\dot\beta(t_1)=\lambda>0\ ,\quad \ddot\beta(t_1)=-\lambda^2<0\ ,$$
$$\omega(t_1)=-\lambda<0\ ,\quad \varepsilon(t_1)=\lambda^2>0\ .$$

c) Notând cu A″ proiecția punctului A pe axa O_1x_1, pe baza fig. 2.4.1.2) se poate scrie relația:

$$AA''=2R+R\cos\beta=5R\sin\theta'\ ,$$

din care, la orice moment al mişcării mecanismului, rezultă succesiv:

$$\theta'=\arcsin\frac{2+\cos\beta(t)}{5}\ ,\quad \omega_1(t)=\dot\theta'=-\frac{\dot\beta(t)\sin\beta}{\sqrt{25-(2+\cos\beta)^2}}\ ,$$

$$\varepsilon_1(t)=\dot\omega_1=-\frac{\ddot\beta(t)\sin\beta}{\sqrt{25-(2+\cos\beta)^2}}-\dot\beta^2(t)\frac{25\cos\beta-(2+\cos\beta)(1+2\cos\beta)}{\left(25-(2+\cos\beta)^2\right)^{3/2}}\ .$$

Particularizând pentru $\beta(t_1)=0$, $\dot\beta(t_1)=\lambda$ şi $\ddot\beta(t_1)=-\lambda^2$, se obțin parametrii cinematici ceruți în enunț:

$$\omega_1(t_1)=0\ ,\quad \varepsilon_1(t_1)=-\frac{\lambda^2}{4}\ ,\quad \theta'(t_1)=\alpha=\arcsin\frac{3}{5}\ .$$

2.4.2. Un mecanism plan, care se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, este format din manivelele O_1O de lungime 2R, articulată în O_1, respectiv AB de lungime R, articulată în punctul A de pe axa O_1y_1 la distanța $O_1A=2R$, la celelalte capete ale acestora fiind articulată biela OB de lungime $\sqrt{5}R$. Ştiind că la un moment dat al mişcării mecanismului, când manivela O_1O este dirijată după axa O_1x_1, viteza unghiulară şi accelerația unghiulară ale manivelei AB au valorile algebrice $\omega_2=2\lambda$ şi $\varepsilon_2=-\lambda^2$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută, pentru momentul considerat să se determine:

a) vitezele unghiulare şi acceleraţiile unghiulare pentru bielă şi cealaltă manivelă;

b) poziția polului acceleraţiilor al bielei şi accelerația mijlocului său C.

Rezolvare

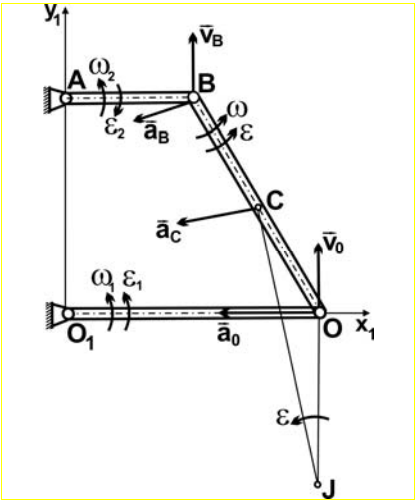


Fig. 2.4.2

a) Din enunț rezultă că, la momentul considerat, mecanismul se află în poziția din fig. 2.4.2, cu cele două manivele paralele între ele şi perpendiculare pe axa O_1y_1, astfel încât se pot scrie relațiile:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB} = 2\lambda R\,\vec{j}_1 ,$$

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon}_2 \times \overrightarrow{AB} - \omega_2^2 \overrightarrow{AB} = -\lambda^2 R\left(4\vec{i}_1 + \vec{j}_1\right) ,$$

$$\vec{v}_O = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BO} = 2\omega_1 R\,\vec{j}_1 ,$$

$$\vec{a}_O = \vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{BO} - \omega^2 \overrightarrow{BO} =$$

$$= \left(2R\varepsilon - R\omega^2 - 4\lambda^2 R\right)\vec{i}_1 + \left(R\varepsilon + 2R\omega^2 - \lambda^2 R\right)\vec{j}_1 =$$

$$= 2R\left(-\omega_1^2\,\vec{i}_1 + \varepsilon_1\,\vec{j}_1\right),$$

din care se determină parametrii cinematici ceruți:

$$\omega = 0 , \quad \omega_1 = \lambda , \quad \varepsilon = \lambda^2 , \quad \varepsilon_1 = 0 .$$

b) Pentru accelerația punctului O acum se pot exprima relațiile:

$$\vec{a}_O = -2\lambda^2 R\,\vec{i}_1 = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JO} = \lambda^2 y_{1J}\,\vec{i}_1 + \lambda^2\left(2R - x_{1J}\right)\vec{j}_1 ,$$

de unde rezultă coordonatele polului accelerațiilor față de sistemul de referință fix:

$$x_{1J} = 2R ,$$

$$y_{1J} = -2R ,$$

poziția sa fiind reprezentată în fig. 2.4.2. Pentru determinarea accelerației punctului C se poate folosi sau formula generală de distribuție a accelerațiilor:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OC} - \omega^2 \overrightarrow{OC} = -\lambda^2 R\left(3\vec{i}_1 + \frac{1}{2}\vec{j}_1\right) , \quad a_C = \frac{\sqrt{37}}{2}\lambda^2 R = 6{,}04\lambda^2 R ,$$

sau formula de distribuție de rotație față de polul accelerațiilor:

$$\vec{a}_C = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JC} - \omega^2 \overrightarrow{JC} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JC} , \quad a_C = \lambda^2 R\sqrt{4 + \frac{5}{4} + 4\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{37}}{2}\lambda^2 R .$$

2.4.3. Mecanismul din fig. 2.4.3, care se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, este format din manivela O_1D de lungime R, bara AB de lungime 4R, bara BC de lungime 2R şi 3 culisoare, dintre care două se mişcă pe axa O_1x_1 şi unul pe O_1y_1. Cunoscând

$OD = DA = R$ şi variaţia în timp a unghiului dintre manivelă şi axa O_1x_1 dată de $\theta_1 = \pi/2 - \lambda t$, unde λ este o constantă pozitivă, să se determine:

a) vitezele unghiulare, acceleraţiile unghiulare, centrele instantanee de rotaţie şi polii acceleraţiilor pentru barele AB şi BC;

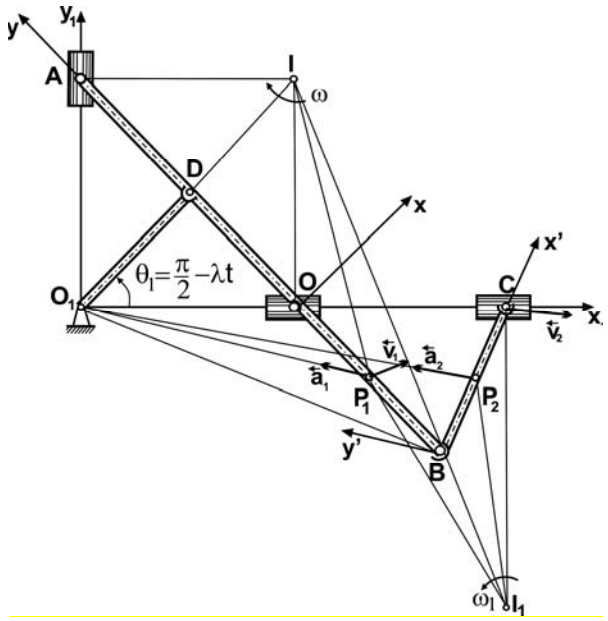


Fig. 2.4.3

b) ecuaţiile bazelor şi rulantelor pentru cele două bare faţă de sistemele de referinţă din figură;

c) valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor P_1 de pe bara AB şi P_2 de pe bara BC, pentru care $BP_1 = BP_2 = R$.

Răspunsuri

a) $\omega_{AB} = \omega = \lambda$,
$\omega_{BC} = \omega_1 = -\lambda$;
$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$;
$O_1I = 2DI = 2R$,
$x_{1I_1} = 6R\sin\lambda t$,
$y_{1I_1} = -6R\cos\lambda t$;
$J \equiv J_1 \equiv O_1$;

b) $x_1^2 + y_1^2 = (2R)^2$, $x^2 + (y-R)^2 = R^2$;
$x_1^2 + y_1^2 = (6R)^2$, $(x'+R)^2 + (y')^2 = (3R)^2$;

c) $v_1 = \lambda R\sqrt{1+8\cos^2\lambda t}$, $v_2 = \lambda R\sqrt{1+24\cos^2\lambda t}$;
$a_1 = \lambda^2 R\sqrt{1+8\sin^2\lambda t}$, $a_2 = \lambda^2 R\sqrt{1+24\sin^2\lambda t}$.

2.4.4. Dacă pentru mecanismul din fig. 2.4.2, la momentul în care ocupă poziţia din figură, se cunosc $\omega_2 = -2\lambda$ şi $\varepsilon_2 = 3\lambda^2$, având sensurile contrare celor din figură, să se determine aceleaşi elemente ale mişcării sale la momentul considerat.

Răspunsuri

a) $\omega = 0$, $\omega_1 = -\lambda$;

$\varepsilon = \lambda^2$, $\varepsilon_1 = 2\lambda^2$;

b) $x_{1J} = y_{1J} = -2R$;

$\vec{a}_C = \lambda^2 R\left(-3\vec{i}_1 + \frac{7}{2}\vec{j}_1\right)$, $a_C = \frac{\sqrt{85}}{2}\lambda^2 R = 4{,}6\lambda^2 R$.

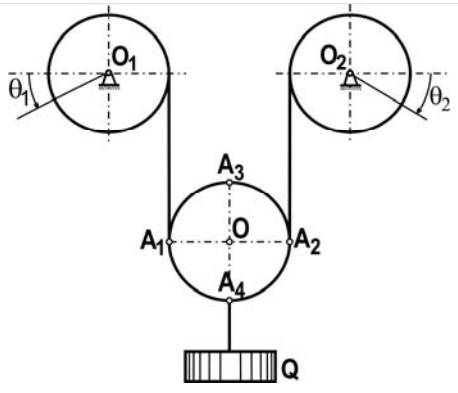


Fig. 2.4.5

2.4.5. Mecanismul de ridicat cu dublă acţionare din fig. 2.4.5, format din 3 scripeţi de aceeaşi rază R şi din sarcina Q, se mişcă într-un plan vertical astfel încât cei doi scripeţi cu axă fixă orizontală se rotesc după legile $\theta_1 = 2\lambda t$ şi $|\theta_2| = \lambda t$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută şi cele două unghiuri de rotaţie având sensurile din figură.

a) Să se determine viteza unghiulară, acceleraţia unghiulară, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor pentru scripetele mobil.

b) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor sarcinii şi ale punctelor A_1, A_2, A_3, A_4 de pe periferia scripetelui mobil, pentru care, la un moment dat al mişcării mecanismului, diametrul A_1A_2 este orizontal şi A_3A_4 vertical.

Răspunsuri

a) $\omega = -\frac{\lambda}{2}$; $\varepsilon = 0$; $IA_1 = 2\,IA_2 = 4R$; $J \equiv O$.

b) $v_Q = \frac{3}{2}\lambda R$, $v_1 = 2\lambda R$, $v_2 = \lambda R$, $v_3 = v_4 = \frac{\sqrt{10}}{2}\lambda R = 1{,}8\lambda R$;

$a_Q = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{\lambda^2 R}{4}$.

2.4.6. Dacă pentru mecanismul de ridicat din fig. 2.4.5, unghiurile de rotație considerate variază în timp după legile $\theta_1 = 2\lambda t + \lambda^2 t^2$ şi $\theta_2 = 2\lambda t - \lambda^2 t^2$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută, să se determine aceleaşi elemente ale mişcării sale la un moment dat t .

Răspunsuri

a) $\omega = -2\lambda^2 t$; $\varepsilon = -2\lambda^2$; $IO = \dfrac{R}{\lambda t}$; $J \equiv O$.

b) $v_Q = 2\lambda R$, $v_1 = 2\lambda R(1+\lambda t)$, $v_2 = 2\lambda R|1-\lambda t|$,

$v_3 = v_4 = 2\lambda R\sqrt{1+\lambda^2 t^2}$;

$a_Q = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2\lambda^2 R\sqrt{1+4\lambda^4 t^4}$.

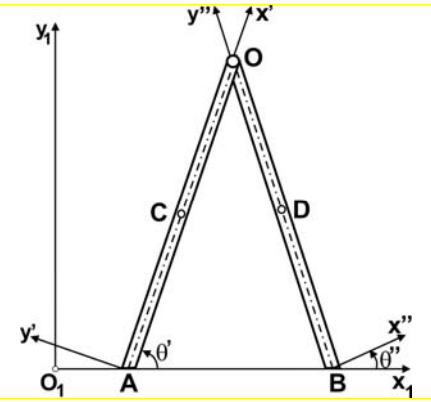


Fig. 2.4.7

2.4.7. Barele OA şi OB de lungime 2ℓ fiecare, articulate între el în O, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât celelalte capete ale lor se mişcă pe axa O_1x_1 după legile:

$$x_{1A} = 2\ell\cos\lambda t \ , \quad x_{1B} = 6\ell\cos\lambda t \ ,$$

unde λ este o constantă pozitivă cunoscută (vezi fig. 2.4.7).

a) Să se determine vitezele unghiulare, acceleraţiile unghiulare, centrele instantanee de rotaţie şi polii acceleraţiilor pentru cele două bare.

b) Să se scrie ecuaţiile centroidelor celor două bare şi ecuaţia traiectoriei punctului O, alegând sistemele de referinţă legate de bare astfel încât axa Ax′ să fie dirijată după AO, iar By′′ după BO.

c) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor mijloacelor C şi D ale barelor la un moment t al mişcării.

Răspunsuri

a) $\omega_{OA} = \omega_1 = \lambda$, $\omega_{OB} = \omega_2 = -\lambda$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$;

$x_{1I_1} = 2\ell\cos\lambda t$, $y_{1I_1} = -2\ell\sin\lambda t$; $x_{1I_2} = 6\ell\cos\lambda t$, $y_{1I_2} = 6\ell\sin\lambda t$;
$J_1 \equiv J_2 \equiv O_1$.

b) $x_1^2 + y_1^2 = (2\ell)^2$, $(x' + \ell)^2 + (y')^2 = \ell^2$;
$x_1^2 + y_1^2 = (6\ell)^2$, $(x'')^2 + (y'' - 3\ell)^2 = (3\ell)^2$;
$\left(\frac{x_1}{4\ell}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{2\ell}\right)^2 = 1$.

c) $v_C = \lambda\ell\sqrt{1 + 8\sin^2\lambda t}$, $v_D = \lambda\ell\sqrt{1 + 24\sin^2\lambda t}$;
$a_C = \lambda^2\ell\sqrt{1 + 8\cos^2\lambda t}$, $a_D = \lambda^2\ell\sqrt{1 + 24\cos^2\lambda t}$.

2.4.8. Dacă pentru mecanismul din fig. 2.4.7, legile de mişcare rectilinie ale capetelor A şi B ale barelor sunt:

$$x_{1A} = \ell\sin\lambda t \ , \quad x_{1B} = 5\ell\sin\lambda t \ ,$$

λ fiind o constantă pozitivă cunoscută, să se determine aceleaşi elemente ale mişcării sale, ca în problema precedentă.

Răspunsuri

a) $\omega_1 = -\lambda$, $\omega_2 = \lambda$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$; $x_{1I_1} = \ell\sin\lambda t$, $y_{1I_1} = -\ell\cos\lambda t$;
$x_{1I_2} = 5\ell\sin\lambda t$, $y_{1I_2} = 5\ell\cos\lambda t$; $J_1 \equiv J_2 \equiv O_1$.

b) $x_1^2 + y_1^2 = \ell^2$, $\left(x' + \frac{\ell}{2}\right)^2 + (y')^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$;
$x_1^2 + y_1^2 = (5\ell)^2$, $(x'')^2 + \left(y'' - \frac{5\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\ell}{2}\right)^2$;
$\left(\frac{x_1}{3\ell}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{2\ell}\right)^2 = 1$.

c) $v_C = \lambda\ell\sqrt{1 + 3\cos^2\lambda t}$, $v_D = \lambda\ell\sqrt{1 + 15\cos^2\lambda t}$;
$a_C = \lambda^2\ell\sqrt{1 + 3\sin^2\lambda t}$, $a_D = \lambda^2\ell\sqrt{1 + 15\sin^2\lambda t}$.

2.4.9. Mecanismul din fig. 2.4.9, care se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, este format din discul circular de rază R cu centrul în O, biela OA de lungime 4R şi

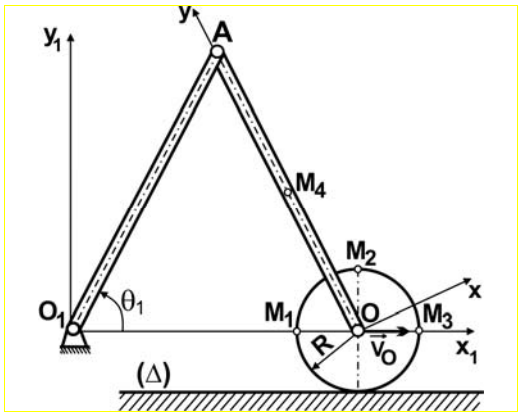


Fig. 2.4.9

manivela O_1A de aceeaşi lungime, cele 3 corpuri ale sale fiind articulate între ele ca în figură. Ştiind că discul se rostogoleşte fără alunecare pe dreapta (Δ) paralelă cu axa O_1x_1, astfel încât centrul său O are o mişcare rectilinie şi uniformă pe O_1x_1 cu viteza de valoare $v_O = 8\lambda R$ cunoscută, să se determine:

a) vitezele unghiulare, acceleraţiile unghiulare, centrele instantanee de rotaţie şi polii acceleraţiilor pentru bielă şi disc;

b) ecuaţiile bazei şi rulantei pentru bielă, dacă sistemul de referinţă legat de ea se alege cu axa Oy dirijată după OA;

c) valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor M_1, M_2, M_3 de pe periferia discului şi M_4 de la mijlocul bielei la momentul în care unghiul θ_1 dintre manivelă şi axa O_1x_1 are valoarea $\pi/4$.

Răspunsuri

a) $\omega_{OA} = \omega = \dfrac{\lambda}{\sin\theta_1}$, $\omega_d = \omega_1 = -8\lambda$;

$\varepsilon = \dfrac{\lambda^2\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}$, $\varepsilon_1 = 0$;

$O_1I = 2AI = 8R$, $x_{II_1} = 8R\cos\theta_1$, $y_{II_1} = -R$;

$J \equiv J_1 \equiv O$;

b) $x_1^2 + y_1^2 = (8R)^2$,

$x^2 + (y-4R)^2 = (4R)^2$;

c) $v_1 = v_3 = 8\sqrt{2}\lambda R$, $v_2 = 16\lambda R$, $v_4 = 2\sqrt{10}\lambda R$;

$a_1 = a_2 = a_3 = 64\lambda^2 R$, $a_4 = 4\sqrt{2}\lambda^2 R$.

2.4.10. Dacă pentru mecanismul din fig. 2.4.9 se dă legea de mişcare rectilinie pe axa O_1x_1 a centrului discului sub forma $x_{1O} = 8R\sin\lambda t$, unde λ este o constantă

pozitivă cunoscută, să se determine elementele mişcării sale cerute la punctele a) şi c) din problema precedentă, poziția polului acceleraţiilor al discului trebuind precizată la momentul în care $\theta_1 = \pi/4$.

Răspunsuri

a) $\omega = \lambda$, $\omega_1 = -8\lambda\cos\lambda t$;

$\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 8\lambda^2 \sin\lambda t$;

$O_1I = 2AI = 8R$, $x_{II_1} = 8R\sin\lambda t$, $y_{II_1} = -R$;

$J \equiv O_1$,

$$OJ_1 = \frac{R}{\sqrt{33}} = 0{,}174R \ ,$$

$$\varphi_1 = \text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{8} = 10° \ ;$$

c) $v_1 = v_3 = 8\lambda R$, $v_2 = 8\sqrt{2}\lambda R$, $v_4 = 2\sqrt{5}\lambda R$;

$a_1 = 8\lambda^2 R\sqrt{17 - 4\sqrt{2}} = 26{,}94\lambda^2 R$, $a_2 = 24\sqrt{2}\lambda^2 R$,

$a_3 = 8\lambda^2 R\sqrt{17 + 4\sqrt{2}} = 38{,}08\lambda^2 R$, $a_4 = 2\sqrt{5}\lambda^2 R$.

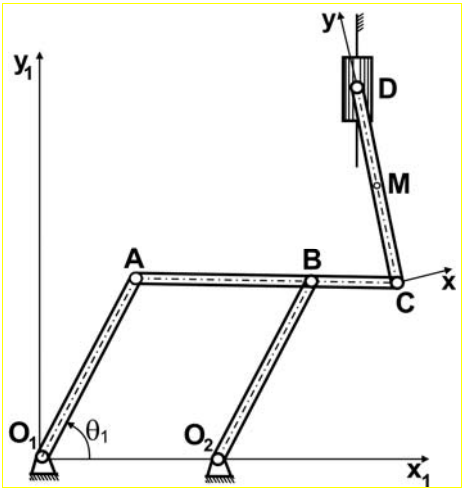


Fig. 2.4.11

2.4.11. Mecanismul din fig. 2.4.11, format din 4 bare articulate între el ca în figură, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât culisorul D are o mişcare rectilinie pe o axă paralelă cu O_1y_1 la distanța 3ℓ de aceasta. Cunoscând lungimile barelor $O_1A = O_2B = CD = 2\ell$, $AC = 3\ell$, distanța $O_1O_2 = AB = 2\ell$ şi variația în timp $\theta_1 = \lambda t$ a unghiului dintre O_1A şi axa O_1x_1, unde λ este o constantă pozitivă, pentru bara CD să se determine:

a) viteza unghiulară, acceleraţia unghiulară, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor;

b) ecuaţiile bazei şi rulantei, alegând sistemul de referinţă legat de bară cu axa Cy

dirijată după ea;

c) valorile vitezei şi acceleraţiei mijlocului său M la momentul în care unghiul θ_1 are valoarea $\pi/3$.

Răspunsuri

a) $\omega = -\lambda$; $\varepsilon = 0$;
$x_{1I} = 3\ell + 4\ell\cos\lambda t$, $y_{1I} = 4\ell\sin\lambda t$; $x_{1J} = 3\ell$, $y_{1J} = 0$;

b) $(x_1 - 3\ell)^2 + y_1^2 = (4\ell)^2$, $x^2 + y^2 = (2\ell)^2$;

c) $v_M = \sqrt{3}\lambda\ell$, $a_M = \sqrt{7}\lambda^2\ell$.

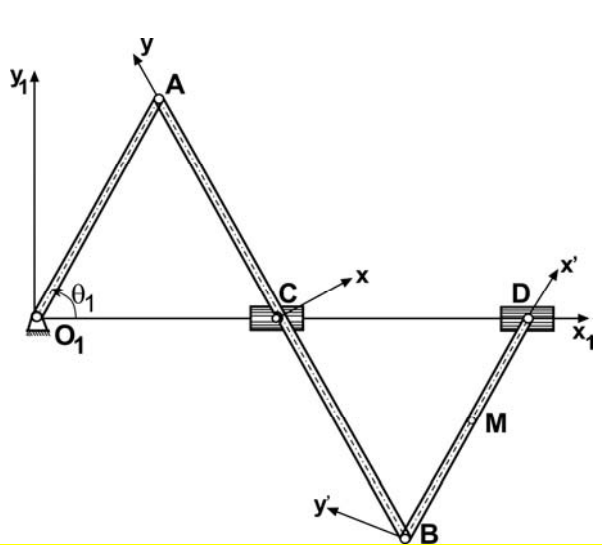


Fig. 2.4.12

2.4.12. Mecanismul din fig. 2.4.12, care se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, este format din 3 bare articulate între el ca în figură şi din 2 culisoare având mişcări rectilinii pe axa O_1x_1, culisorul C fiind articulat la mijlocul barei AB. Cunoscând lungimile barelor $O_1A = BD = \ell$, $AB = 2\ell$ şi variaţia în timp a unghiului dintre O_1A şi axa O_1x_1 dată de $\theta_1 = \lambda t$, λ fiind o constantă pozitivă, să se determine:

a) vitezele unghiulare, acceleraţiile unghiulare, centrele instantanee de rotaţie şi polii acceleraţiilor pentru barele AB şi BD;

b) ecuaţiile bazelor şi rulantelor pentru aceleaşi bare, considerând sistemele de referinţă legate de ele cu axa Cy după CA, respectiv cu axa Bx′ după BD;

c) valorile vitezei şi acceleraţiei mijlocului M al barei BD la momentul în care $\theta_1 = \pi/3$.

Răspunsuri

a) $\omega_{AB} = \omega = -\lambda$, $\omega_{BD} = \omega_1 = \lambda$;
$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$; $O_1I = 2AI = 2\ell$; $x_{1I_1} = 4\ell\cos\lambda t$, $y_{1I_1} = -4\ell\sin\lambda t$;
$J \equiv J_1 \equiv O_1$;

b) $x_1^2 + y_1^2 = (2\ell)^2$, $x^2 + (y-\ell)^2 = \ell^2$;
$x_1^2 + y_1^2 = (4\ell)^2$, $(x'+\ell)^2 + (y')^2 = (2\ell)^2$;

c) $v_M = \frac{\sqrt{37}}{2}\lambda\ell = 3{,}04\lambda\ell$; $a_M = \frac{\sqrt{13}}{2}\lambda^2\ell = 1{,}8\lambda^2\ell$.

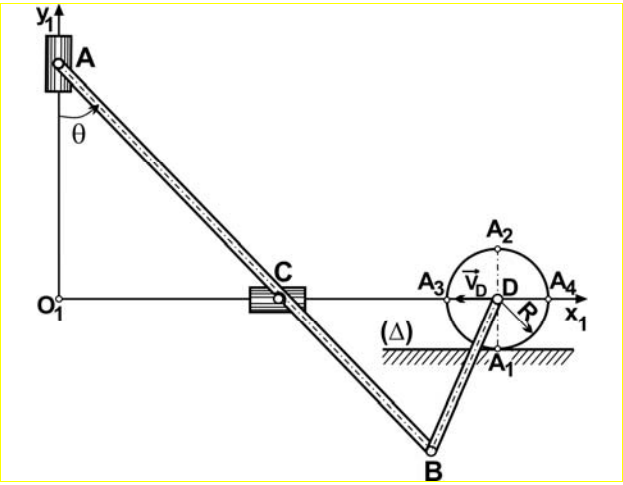


Fig. 2.4.13

2.4.13. Mecanismul din fig. 2.4.13, care se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, este format din discul circular de rază R cu centrul în D, bara BD de lungime ℓ şi bara AB de lungime 2ℓ, cele 3 corpuri ale sale fiind articulate între ele ca în figură. Ştiind că punctul A se mişcă pe axa O_1y_1, că mijlocul C al barei AB are o mişcare rectilinie pe axa O_1x_1 şi că discul se rostogoleşte fără alunecare pe dreapta (Δ), paralelă cu O_1x_1, astfel încât centrul său are o mişcare rectilinie şi uniformă pe O_1x_1 cu viteza de valoare v_D cunoscută şi orientată ca în figură, să se determine:

a) vitezele unghiulare, acceleraţiile unghiulare, centrele instantanee de rotaţie şi polii acceleraţiilor pentru cele 3 corpuri ale mecanismului în funcţie de unghiul θ dintre bara AB şi axa O_1y_1 ;

b) valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor A_1, A_2, A_3 şi A_4 de pe periferia discului, pentru care diametrul A_1A_2 este paralel cu axa O_1y_1, iar A_3 şi A_4 se află pe axa O_1x_1 la momentul considerat;

c) expresiile analitice faţă de sistemul de referinţă fix ale vitezelor şi acceleraţiilor punctelor A, B şi C în funcţie de unghiul θ.

Răspunsuri

a) $\omega_d = \omega_1 = \dfrac{v_D}{R}$, $\omega_{BD} = \omega_2 = \dfrac{v_D}{3\ell\cos\theta}$,

$\omega_{AB} = \omega = \dot{\theta} = -\omega_2$;

$\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon = -\varepsilon_2 = \dfrac{v_D^2}{9\ell^2}\dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$;

$I_1 \equiv A_1$, $y_{1I_2} = -DI_2 = -3\ell\cos\theta$, $y_{1I} = CI = \ell\cos\theta$;

$J_1 \equiv J_2 \equiv D$, $J \equiv C$;

b) $v_1 = 0$, $v_2 = 2v_D$, $v_3 = v_4 = \sqrt{2}v_D$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dfrac{v_D^2}{R}$;

c) $\vec{v}_A = \dfrac{v_D}{3}\,tg\theta\,\vec{j}_1$, $\vec{v}_B = -\dfrac{v_D}{3}\left(2\vec{i}_1 + tg\theta\,\vec{j}_1\right)$, $\vec{v}_C = -\dfrac{v_D}{3}\,\vec{i}_1$;

$\vec{a}_C = \vec{0}$, $\vec{a}_B = -\vec{a}_A = \dfrac{v_D^2}{9l\cos^3\theta}\,\vec{j}_1$.

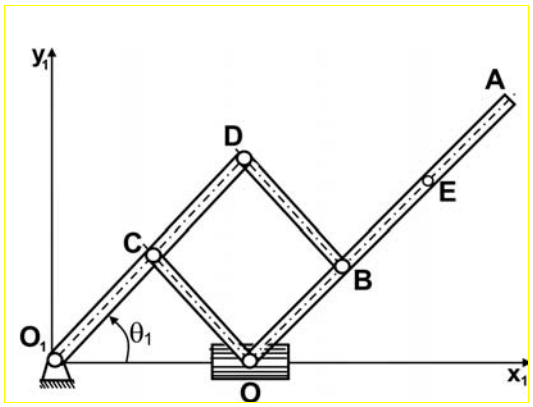


Fig. 2.4.14

2.4.14. Mecanismul elipsograf din fig. 2.4.14, care se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, este format din 4 bare de lungimi $O_1D = 2\ell$, $OC = BD = \ell$ şi $OA = 3\ell$, articulate între ele ca în figură, articulația O mişcându-se pe axa O_1x_1. Ştiind că $O_1C = CD = OB = BE = EA$ şi că unghiul dintre bara O_1D şi axa O_1x_1 variază în timp după legea $\theta_1 = \lambda t$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută, să se determine:

a) vitezele unghiulare, acceleraţiile unghiulare, centrele instantanee de rotaţie şi polii acceleraţiilor pentru barele OC, BD şi OA;

b) valorile vitezelor şi acceleraţiilor punctelor O, B, E şi A la momentul în care $\theta_1 = \pi/3$ pentru datele numerice: $\ell = 0{,}2\text{m}$, $\lambda = 0{,}5\ \text{s}^{-1}$.

Răspunsuri

a) $\omega_{OC} = \omega_1 = \omega_{BD} = \omega_2 = -\lambda$, $\omega_{OA} = \omega = \lambda$;
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 0$;
$I_1 \equiv D$, $O_1I_2 = 2DI_2 = 4\ell$, $x_{1I} = 2\ell\cos\lambda t$, $y_{1I} = -2\ell\sin\lambda t$;
$J_1 \equiv J_2 \equiv J \equiv O_1$;

b) $v_O = 0{,}173$ m/s , $v_B = 0{,}265$ m/s , $v_E = 0{,}374$ m/s ,
$v_A = 0{,}458$ m/s ; $a_O = 0{,}05$m/s^2 , $a_B = 0{,}087$ m/s^2 ,
$a_E = 0{,}132$ m/s^2 , $a_A = 0{,}187$ m/s^2 .

2.5. Mişcarea relativă a punctului material

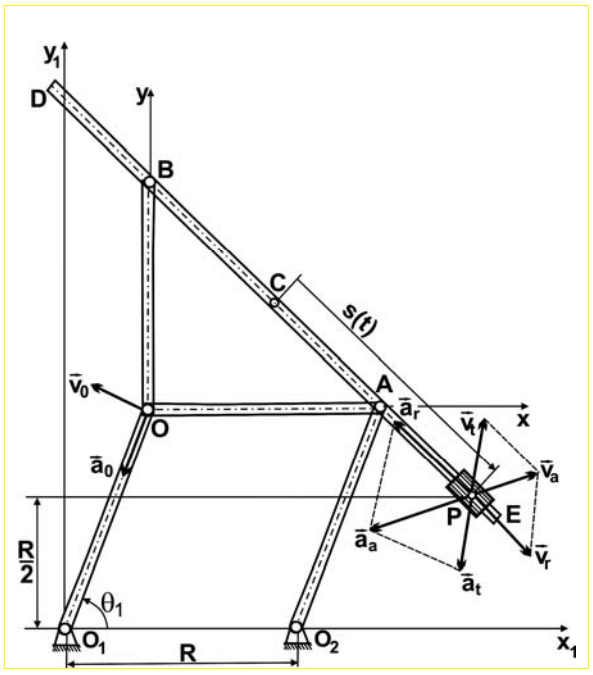


Fig. 2.5.1

2.5.1. Mecanismul din fig. 2.5.1, format din 5 bare articulate între ele ca în figură, de lungimi $O_1O = O_2A = OA = OB = R$ şi $DE = 2\sqrt{2}R$, pentru care $DB = BC = CA = AE$ şi $O_1O_2 = R$, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât unghiul dintre manivela O_1O şi axa O_1x_1 variază în timp după legea $\theta_1 = \lambda t$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută. Pe bara DE se mişcă un culisor P după legea $CP = s(t) = \sqrt{2}R\sin\lambda t$. Să se determine traiectoria, viteza şi acceleraţia în mişcarea absolută a culisorului.

Rezolvare

Din fig. 2.5.1 şi din enunţ se observă imediat că triunghiul OAB de bare articulate, care formează un sistem rigid, este dreptunghic în O şi isoscel, astfel încât axele sistemului de referinţă Oxy legat de el rămân paralele cu axele fixe tot timpul mişcării. Rezultă că bara DE are o mişcare de translaţie circulară cu viteza şi acceleraţia punctului O, care sunt elemente ale mişcării de transport a culisorului în mişcarea sa absolută. Ca urmare, viteza absolută şi acceleraţia absolută pentru culisor se determină după cum urmează:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \ , \quad v_r = \dot{s} = \sqrt{2}\lambda R\cos\lambda t \ , \quad v_t = \lambda R \ ,$$

$$v_a = \lambda R\sqrt{1+2\cos^2\lambda t - 2\sqrt{2}\cos\lambda t\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\lambda t\right)} = \lambda R\left|\cos\lambda t - \sin\lambda t\right|$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c \ , \quad a_r = \dot{v}_r = -\sqrt{2}\lambda^2 R\sin\lambda t \ , \quad a_t = \lambda^2 R \ , \quad a_c = 0 \ ,$$

$$a_a = \lambda^2 R\sqrt{1+2\sin^2\lambda t + 2\sqrt{2}\sin\lambda t\cos\left(\frac{\pi}{4}+\lambda t\right)} = \lambda^2 R\left|\sin\lambda t + \cos\lambda t\right| \ .$$

Pentru determinarea traiectoriei absolute a culisorului, se exprimă ca funcţii de timp coordonatele sale faţă de sistemul de referinţă fix:

$$x_1 = \frac{R}{2} + R\sin\lambda t + R\cos\lambda t \ , \quad y_1 = \frac{R}{2} - R\sin\lambda t + R\sin\lambda t = \frac{R}{2} \ ,$$

de unde rezultă că mişcarea absolută a culisorului este rectilinie pe o dreaptă paralelă cu axa O_1x_1 la distanţa $R/2$ de aceasta. Se observă că se obţin aceleaşi valori absolute pentru v_a şi a_a prin derivarea în raport cu timpul a abscisei x_1 a culisorului.

2.5.2. Bara OAB din fig. 2.5.2, având laturile OA şi EB perpendiculare între ele, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât punctul său E are o mişcare circulară pe cercul cu centrul în punctul O de pe axa O_1y_1, de rază $OE = OO_1 = R$, iar latura sa EB trece printr-un manşon articulat de culisorul C, care se mişcă pe axa O_1x_1. Bara CD este solidarizată de culisor în poziţia sa în care este perpendiculară pe axa culisorului şi punctul său de intersecţie cu latura OA a primei bare este materializat printr-un inel P. Ştiind că legea mişcării rectilinii a culisorului este exprimată prin $O_1C = x_{1C} = R(1+2\lambda t)$, unde λ este o constantă pozitivă cunoscută, să se determine elementele mişcărilor relative faţă de cele două bare ale inelului şi elementele mişcării sale absolute.

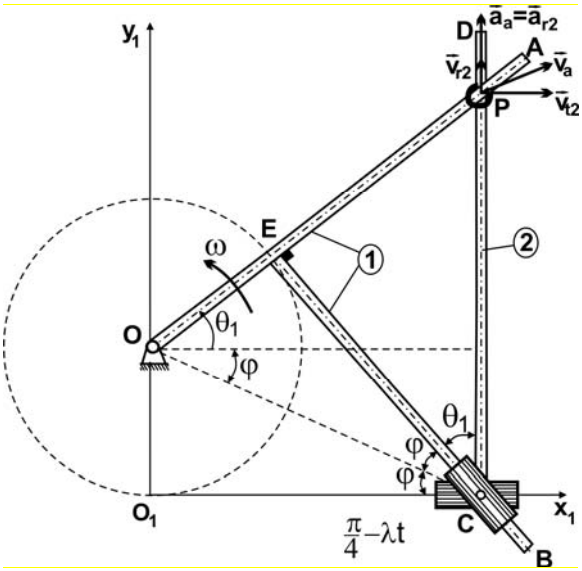


Fig. 2.5.2

Rezolvare

Ca parametru de poziție pentru mecanismul format de cele două bare se poate alege unghiul θ_1 dintre latura OA a primei bare şi direcția pozitivă a axei O_1x_1. Notând $\theta = \theta_1/2$, din fig. 2.5.2 se observă că unghiurile formate de latura comună OC a triunghiurilor dreptunghice congruente OCE şi OCO_1 cu catetele corespunzătoare au valorile:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2} = \frac{\pi}{4} - \theta \quad ,$$

astfel încât rezultă:

$$O_1C = EC = R\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = R\frac{1+\mathrm{tg}\theta}{1-\mathrm{tg}\theta} = \frac{R\cos\theta_1}{1-\sin\theta_1} \quad ,$$

$$OP = R + EC\,\mathrm{tg}\theta_1 = \frac{R}{1-\sin\theta_1} = CP = \frac{EC}{\cos\theta_1} \quad ;$$

$$v_C = \dot{x}_{1C} = 2\lambda R = \frac{R\dot{\theta}_1}{1-\sin\theta_1} \quad , \qquad \omega = \dot{\theta}_1 = 2\lambda\left(1-\sin\theta_1\right) \quad ;$$

$$v_{r1} = v_{r2} = \frac{R\dot{\theta}_1\cos\theta_1}{\left(1-\sin\theta_1\right)^2} = \frac{2\lambda R\cos\theta_1}{1-\sin\theta_1} \quad ; \qquad a_{r1} = a_{r2} = \frac{2\lambda R\dot{\theta}_1}{1-\sin\theta_1} = 4\lambda^2 R \quad ;$$

$$\vec{v}_{r1} = v_{r1}\left(\cos\theta_1\vec{i}_1 + \sin\theta_1\vec{j}_1\right) \quad ; \qquad \vec{a}_{r1} = a_{r1}\left(\cos\theta_1\vec{i}_1 + \sin\theta_1\vec{j}_1\right) \quad ,$$

unde ω reprezintă viteza unghiulară a primei bare. Vitezele şi acceleraţiile de transport ale inelului față de cele două bare vor fi:

$$v_{t1} = \omega OP = 2\lambda R \quad , \qquad \vec{v}_{t1} = v_{t1}\left(-\sin\theta_1\vec{i}_1 + \cos\theta_1\vec{j}_1\right) \quad ;$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = -4\lambda^2\cos\theta_1\left(1-\sin\theta_1\right) \quad ,$$

$$a_{t1}^{\tau} = |\varepsilon| OP = 4\lambda^2 R\cos\theta_1 \quad , \qquad a_{t1}^{n} = \omega^2 OP = 4\lambda^2 R\left(1-\sin\theta_1\right) \quad ,$$

$$\vec{a}_{t1} = -a_{t1}^{\tau}\left(-\sin\theta_1\vec{i}_1 + \cos\theta_1\vec{j}_1\right) - a_{t1}^{n}\left(\cos\theta_1\vec{i}_1 + \sin\theta_1\vec{j}_1\right) ;$$

$$\vec{v}_{t2} = \vec{v}_C = 2\lambda R\vec{i}_1 , \quad a_{t2} = a_C = 0 ,$$

iar accelerațiile sale complementare devin:

$$\vec{a}_{c1} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{r1} = 4\lambda^2 R\left(-\sin 2\theta_1\vec{i}_1 + 2\cos^2\theta_1\vec{j}_1\right) , \quad a_{c2} = 0 ,$$

astfel încât rezultă:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{r1} + \vec{v}_{t1} = \vec{v}_{r2} + \vec{v}_{t2} = 2\lambda R\left(\vec{i}_1 + \frac{\cos\theta_1}{1-\sin\theta_1}\vec{j}_1\right) , \quad v_a = \frac{2\sqrt{2}\lambda R}{\sqrt{1-\sin\theta_1}} ;$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{r1} + \vec{a}_{t1} + \vec{a}_{c1} = \vec{a}_{r2} = 4\lambda^2 R\vec{j}_1 .$$

Pentru determinarea traiectoriei absolute a inelului, se exprimă coordonatele sale față de sistemul de referință fix ca funcții de timp prin intermediul parametrului de poziție θ_1:

$$x_1 = x_{1C} = \frac{R\cos\theta_1}{1-\sin\theta_1} , \quad y_1 = CP = \frac{R}{1-\sin\theta_1} ,$$

de unde se obține ecuația sa:

$$y_1 = \frac{R}{2} + \frac{x_1^2}{2R} ,$$

care reprezintă o parabolă cu axa de simetrie paralelă cu O_1y_1. Se observă că se obțin aceleaşi expresii pentru viteza absolută şi accelerația absolută ale inelului, dacă se derivează în raport cu timpul coordonatele sale x_1 şi y_1 şi se ține seama de valoarea determinată a vitezei unghiulare $\omega = \dot{\theta}_1$.

2.5.3. Circumferința din sârmă cu centrul O şi de rază R din fig. 2.5.3 se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$, fiind antrenată de manivelele O_1B şi O_2D articulate la capetele diametrului său BD, pentru care se cunosc: $O_1B = O_2D = O_1O_2 = 2R$, $\theta_1 = \lambda t$, λ fiind o constantă pozitivă dată. Pe circumferință se mişcă inelul A după legea $\theta = \lambda t$, unghiul θ dintre razele OB şi OA având sensul din figură. Să se determine elementele mişcărilor relativă, de transport şi absolută ale inelului.

Răspunsuri

$v_r = \lambda R$, $v_t = 2\lambda R$, $v_a = v_t - v_r = \lambda R$;

$a_r = \lambda^2 R$, $a_t = 2\lambda^2 R$, $a_c = 0$, $a_a = a_t - a_r = \lambda^2 R$;

$(\Gamma_a)\quad (x_1 - R)^2 + y_1^2 = R^2.$

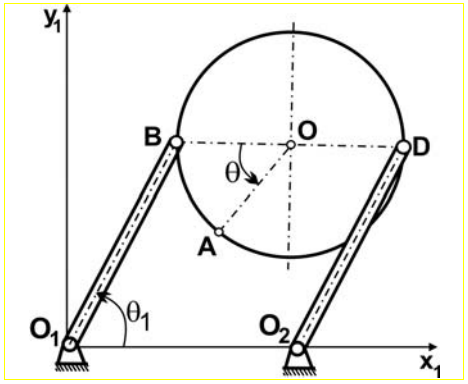


Fig. 2.5.3

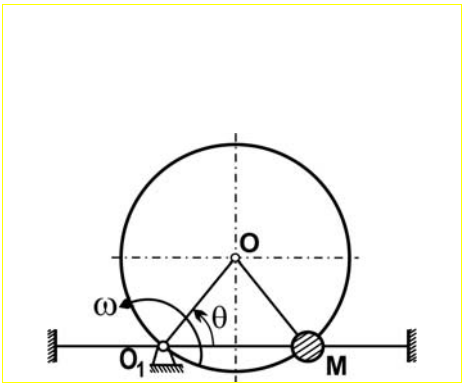


Fig. 2.5.4

2.5.4. Circumferința din sârmă cu centrul O şi de rază R din fig. 2.5.4 se roteşte în planul său cu viteza unghiulară ω constantă în jurul punctului său fix O_1, care este situat pe o dreaptă fixă din planul mişcării sale. Al doilea punct de intersecție dintre dreapta fixă şi circumferință este materializat printr-un inel M. Să se determine vitezele şi acceleraţiile relative, de transport şi absolute ale inelului la un moment dat al mişcării, când unghiul dintre raza O_1O şi dreapta fixă are valoarea θ cunoscută.

Răspunsuri

$v_t = 2R\omega\cos\theta$, $v_r = 2R\omega$, $v_a = 2R\omega\sin\theta$;
$a_t = 2R\omega^2\cos\theta$, $a_r = a_c = 4R\omega^2$, $a_a = a_t = 2R\omega^2\cos\theta$.

2.5.5. Un avion zboară uniform spre nord după un meridian al Pământului cu viteza relativă $v_0 = 720$ km/h . Cunoscând raza medie a meridianului pe care se mişcă avionul $R = 6400$ km , să se determine valorile vitezei şi acceleraţiei absolute ale sale la momentul în care ajunge la latitudinea $\lambda = 30°$, ținând seama de mişcarea de rotație a Pământului în jurul axei sale, pentru care să se calculeze viteza unghiulară.

Răspunsuri

$\omega = 7{,}27\cdot10^{-5}\ s^{-1}$, $v_a = 450$ m/s , $a_a = 37{,}5\cdot10^{-3}$ m/s^2 .

2.5.6. Un avion zboară uniform de la vest spre est după o paralelă a Pământului, care are latitudinea nordică $\lambda = 30°$, cu viteza relativă $v_0 = 720$ km/h. Ştiind că avionul zboară la o înălţime pentru care distanţa medie până la centrul Pământului este $R = 6400$ km, să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor sale relative, de transport şi absolute, ţinând seama de mişcarea de rotaţie a Pământului în jurul axei sale.

Răspunsuri

$v_r = v_0 = 200$ m/s , $v_t = R\omega\cos\lambda = 403$ m/s , $v_a = 603$ m/s ;

$a_r = \dfrac{v_0^2}{R\cos\lambda} = 7{,}2\cdot 10^{-3}$ m/s^2 , $a_t = \omega^2 R\cos\lambda = 29\cdot 10^{-3}$ m/s^2 ,

$a_c = 2\omega v_0 = 29{,}1\cdot 10^{-3}$ m/s^2 , $a_a = 65{,}3\cdot 10^{-3}$ m/s^2 .

2.5.7. Un punct material porneşte din vârful unui con circular cu unghiul la vârf 2α şi se mişcă uniform cu viteza relativă u pe o generatoare a conului. Ştiind că, în acelaşi timp, conul se roteşte uniform accelerat, fără viteză unghiulară iniţială, cu acceleraţia unghiulară ε în jurul axei sale de simetrie, să se determine valorile vitezei şi acceleraţiei absolute ale punctului material la un moment t de la începutul mişcării.

Răspunsuri

$v_a = u\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4 \sin^2\alpha}$, $a_a = \varepsilon u t \sin\alpha\sqrt{9+\varepsilon^2 t^4}$.

2.5.8. Un punct material porneşte din vârful unui con circular cu unghiul la vârf 2α şi se mişcă uniform accelerat, fără viteză iniţială, cu acceleraţia relativă w pe o generatoare a conului. Ştiind că, în acelaşi timp, conul se roteşte uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale de simetrie, să se determine valorile vitezei şi acceleraţiei absolute ale punctului material la un moment t de la începutul mişcării.

Răspunsuri

$v_a = \dfrac{wt}{2}\sqrt{4+\omega^2 t^2 \sin^2\alpha}$, $a_a = \dfrac{w}{2}\sqrt{4+\omega^2 t^2\left(12+\omega^2 t^2\right)\sin^2\alpha}$.

2.5.9. Semicercul din sârmă din fig. 2.5.9, având centrul O şi raza R, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât capetele diametrului său BD se mişcă pe axele de coordonate şi unghiul dintre axa Oy trecând prin B şi axa O_1y_1 variază în timp după legea $\theta_1 = \lambda t$, unde λ este o constantă pozitivă cunoscută. Pe semicerc se mişcă un inel A astfel încât unghiul dintre razele OA şi OB variază în timp după legea $\theta = 2\lambda t$. Să se determine elementele mişcărilor relativă şi absolută ale inelului.

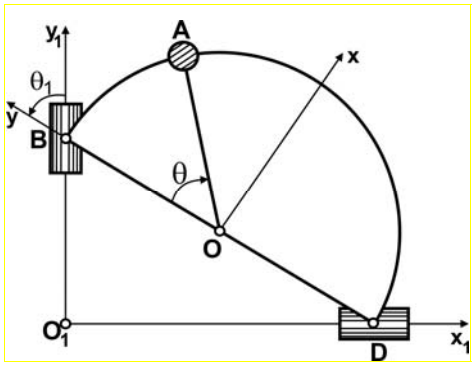


Fig. 2.5.9

Răspunsuri

$(\Gamma_r)\quad x^2 + y^2 = R^2$, $\quad(\Gamma_a)\quad x_1^2 + y_1^2 = 4R^2$;

$v_r = v_a = 2\lambda R$; $\quad a_r = 4\lambda^2 R$, $\quad a_a = a_t = 2\lambda^2 R$.

2.5.10. Bara ABD sub formă de T din fig. 2.5.10, având laturile AB şi OD perpendiculare între ele şi $AO = OB$, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât capetele sale A şi B se mişcă pe axele de coordonate, iar unghiul dintre latura sa AB de lungime 2R şi axa O_1y_1 variază în timp după legea $\theta = \pi t/6$. Pe latura sa OD se mişcă un culisor C după legea: $OC = x(t) = 2R(1 - \cos \pi t/3)$. Pentru $R = 0{,}25$ m să se calculeze valorile vitezei şi acceleraţiei absolute ale culisorului la momentul $t_1 = 1$ s şi să se exprime ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sale absolute în funcţie de θ. Să se verifice că valorile vitezei şi acceleraţiei absolute ale culisorului la momentul t_1 se pot obţine şi prin derivarea în raport cu timpul a coordonatelor sale faţă de sistemul de referinţă fix.

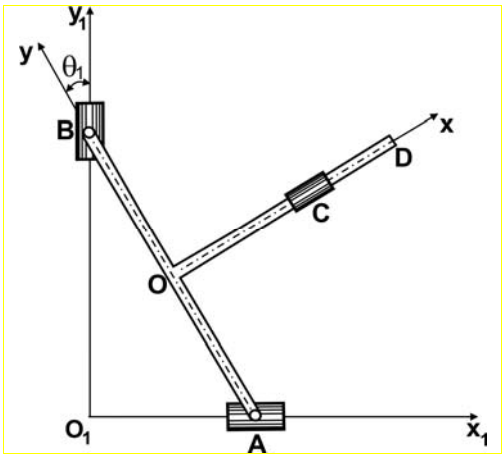


Fig. 2.5.10

Răspunsuri

$v_a = \frac{\pi R}{6}\sqrt{14+\sqrt{3}} = 0{,}52 \text{ m/s}$, $a_a = \frac{\pi^2 R}{36}\sqrt{58-7\sqrt{3}} = 0{,}47 \text{ m/s}^2$;

$x_1 = R\sin\theta + 4R\sin^2\theta\cos\theta$, $y_1 = R\cos\theta + 4R\sin^3\theta$.

2.5.11. Barele O_1A şi BD se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât O_1A se roteşte uniform în jurul articulaţiei O_1 după legea $\theta_1 = \lambda t$ şi BD are o mişcare de translaţie rectilinie după legea $O_1O = x_{1O} = 2R\cos^2\lambda t$ în poziţia în care rămâne paralelă cu axa O_1y_1, punctul său O mişcându-se pe axa O_1x_1. Dacă punctul de intersecţie dintre cele două bare este materializat prin inelul M, să se determine elementele mişcării absolute ale inelului şi elementele mişcărilor sale relative faţă de cele 2 bare, alegând sistemele de referinţă legate de bare cu axele O_1x după O_1A şi Oy' după OB.

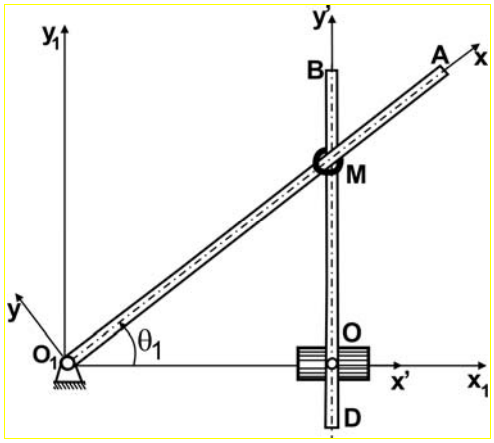


Fig. 2.5.11

Răspunsuri

$x = O_1M = 2R\cos\lambda t$, $y = 0$; $\vec{v}_{r1} = -2R\lambda\sin\lambda t\vec{i}$, $\vec{a}_{r1} = -2R\lambda^2\cos\lambda t\vec{i}$;

$x' = 0$, $y' = OM = R\sin 2\lambda t$;

$\vec{v}_{r2} = 2R\lambda\cos 2\lambda t\vec{j}'$, $\vec{a}_{r2} = -4R\lambda^2\sin 2\lambda t\vec{j}'$;

(Γ_a) $(x_1 - R)^2 + y_1^2 = R^2$, $v_a = 2R\lambda$, $a_a = 4R\lambda^2$.

2.6. Compuneri de mişcări ale corpului rigid

2.6.1. Bara AB de lungime 4R se mişcă în planul fix $O_2x_2y_2$ astfel încât capetele sale se mişcă pe axele de coordonate şi unghiul dintre axa Oy_1 legată de ea şi O_2y_2 variază în timp după legea $\theta_1 = \lambda t$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută. La mijlocul său O este articulat un capăt al barei OD de lungime 5R, iar celălalt capăt D al acesteia este legat printr-un inel de o circumferinţă din sârmă de rază 2R şi cu centrul în C pe axa O_2z_2, care este situată într-un plan paralel cu $O_2x_2y_2$ la distanţa $O_2C = 3R$.

a) Să se determine parametrii cinematici pentru bara OD, în mişcările sale relativă faţă de AB, de transport şi absolută.

b) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor relative şi absolute ale punctelor P_1, P_2 şi P_3 de pe bara OD, pentru care $OP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3D$.

Rezolvare

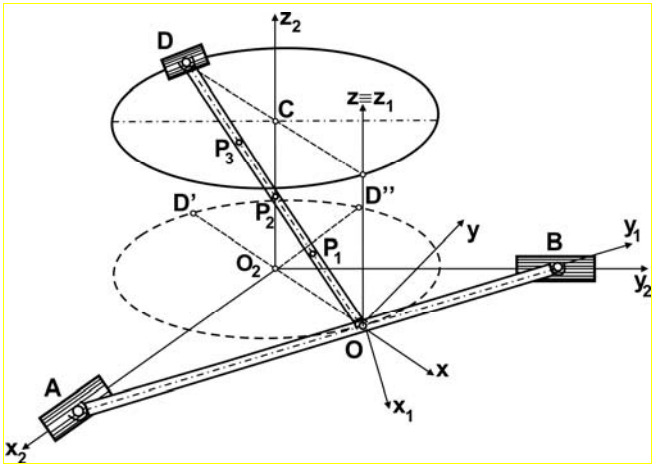


Fig. 2.6.1.a)

a) În fig. 2.6.1.a) s-au reprezentat mecanismul format de cele două bare şi sistemele de referinţă legate de ele $Ox_1y_1z_1$, respectiv Oxyz. Se observă că distanţa $O_2O = 2R$ rămâne constantă tot timpul mişcării mecanismului, astfel încât proiecţia D′ a punctului D pe planul $O_2x_2y_2$ este diametral opusă punctului O pe traiectoria sa, care este tot o circumferinţă de rază 2R, având centrul în O_2.

Deoarece $OD^2 = D'D^2 + D'O^2$, rezultă că dreptunghiul $DD'OD''$ legat de bara OD are o mişcare relativă faţă de AB de rotaţie în jurul laturii OD'' paralelă cu O_2z_2, după care s-au orientat axele Oz_1 legată de AB şi Oz legată de OD. Ca urmare, parametrii cinematici în mişcarea relativă a barei OD faţă de AB vor fi:

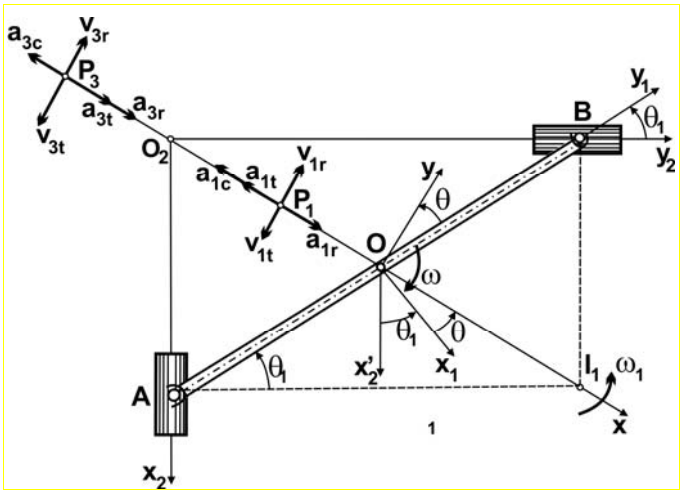


Fig. 2.6.1.b)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - 2\theta_1 = \frac{\pi}{2} - 2\lambda t \ ,$$

$$\vec{\omega}_{10} = \dot{\theta}\vec{k} = -2\lambda\vec{k} \ ,$$

$$\vec{\varepsilon}_{10} = \vec{0} \ .$$

Parametrii cinematici în mişcarea de transport a barei OD sunt parametrii cinematici corespunzători mişcării absolute a barei AB, care, evident, este o mişcare plană în planul $O_2x_2y_2$. Se observă imediat că unghiul dintre axa Ox_2' paralelă cu O_2x_2 şi axa Ox_1 legată de AB este θ_1, astfel încât rezultă:

$$\vec{\omega}_{21} = \dot{\theta}_1\vec{k} = \lambda\vec{k} \ , \quad \vec{\varepsilon}_{21} = \vec{0} \ , \quad O_2I_1 = 2OI_1 = 4R \ , \quad J_1 \equiv O_2 \ ,$$

unde cu I_1 şi J_1 s-au notat centrul instantaneu de rotaţie, respectiv polul acceleraţiilor pentru bara AB.

În urma determinării parametrilor cinematici pentru cele două mişcări componente ale barei OD, se observă că mişcarea sa absolută este compunerea a două mişcări de rotaţie faţă de axe paralele între ele, care poate fi o mişcare plană sau mai particulară. Ca urmare, parametrii cinematici în mişcarea sa absolută vor fi:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21} = -\lambda\vec{k} \ , \quad \vec{\varepsilon} = \vec{0} \ ,$$

$$O_2I = \omega_{10}O_2O + \omega_{21}O_2I_1 = -2\lambda \cdot 2R + \lambda \cdot 4R = 0 \ , \quad I \equiv J \equiv O_2 \ ,$$

deci mişcarea sa absolută este de rotaţie în jurul axei fixe O_2z_2 cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ constantă.

b) Elementele cerute în enunţ ale mişcărilor relative şi absolute ale punctelor P_1, P_2 şi P_3 vor fi aceleaşi cu cele ale proiecţiilor lor pe planul $O_2x_2y_2$, care împart segmentul de dreaptă mobil OD' de lungime 4R în 4 părţi egale. Ca urmare, rezultă:

$$v_{1r} = |\omega_{10}|R = 2\lambda R \ , \quad v_{2r} = 4\lambda R \ , \quad v_{3r} = 6\lambda R \ ;$$

$$v_{1a} = v_{3a} = |\omega| R = \lambda R \ , \quad v_{2a} = 0 \ ;$$

$$a_{1r} = \omega_{10}^2 R = 4\lambda^2 R \ , \quad a_{2r} = 8\lambda^2 R \ , \quad a_{3r} = 12\lambda^2 R \ ;$$

$$a_{1a} = a_{3a} = \omega^2 R = \lambda^2 R \ , \quad a_{2a} = 0 \ .$$

Se observă că punctul P_2 de pe bara OD are viteza absolută ca şi acceleraţia absolută nule, deci se poate obţine aceeaşi mişcare a mecanismului dacă se fixează acest punct printr-o articulaţie pe axa $O_2 z_2$ la distanţa $O_2 P_2 = 3R/2$.

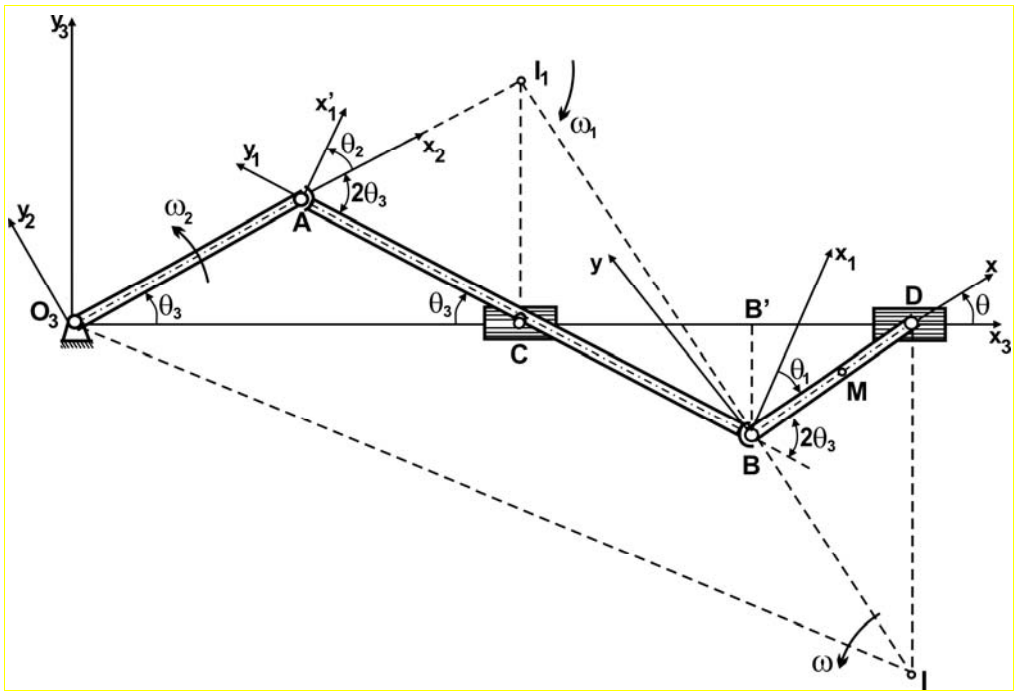


Fig. 2.6.2

2.6.2. Să se studieze mişcarea mecanismului din fig. 2.4.12, considerând mişcarea absolută a barei BD ca fiind compusă din 3 rotaţii în jurul unor axe instantanee paralele între ele, şi anume rotaţia barei BD faţă de AB, a barei AB faţă de O_1A şi a manivelei O_1A faţă de sistemul de referinţă fix. Pentru aceasta, cunoscând variaţia în timp a unghiului θ_1 dată în problema 2.4.12, să se exprime ca funcţii de timp unghiurile de rotaţie corespunzătoare celor 3 rotaţii componente ale mişcării absolute a barei BD şi să se determine:

a) vitezele unghiulare şi acceleraţiile unghiulare în mişcările relative şi absolute ale celor 3 bare;

b) centrele instantanee relative şi absolute ale barelor;

c) polii acceleraţiilor în mişcările relative şi absolute ale barelor;

d) vitezele şi acceleraţiile relative şi absolute ale mijlocului M al barei BD la momentul $t_1 = \pi/3\lambda$.

Rezolvare

Pentru a se utiliza notaţiile consacrate în cazul compunerii mai multor mişcări ale unui corp rigid, sistemul de referinţă fix la care se raportează mişcarea mecanismului din fig. 2.4.12 trebuie să fie notat cu $O_3x_3z_3$, iar unghiul θ_1 devine θ_3. Alegând sistemele de referinţă legate de bare ca în fig. 2.6.2, unde axa Ax_1' este paralelă cu Bx_1, variaţia în timp a unghiurilor de rotaţie corespunzătoare celor 3 rotaţii componente ale mişcării absolute a barei BD rezultă:

$$\theta_1 = -\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_3\right) = 2\lambda t - \frac{\pi}{2} \ ,$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - 2\lambda t \ ,$$

$$\theta_3 = \lambda t \ .$$

a) Cu notaţiile cunoscute, vitezele şi acceleraţiile unghiulare ale barelor în mişcările lor relative şi absolute devin:

$$\omega_{10} = \dot\theta_1 = 2\lambda \ , \quad \omega_{21} = \dot\theta_2 = -2\lambda \ , \quad \omega_2 = \omega_{32} = \dot\theta_3 = \lambda \ ,$$

$$\omega_{20} = \omega_{10} + \omega_{21} = 0 \ , \quad \omega = \omega_{30} = \omega_{20} + \omega_{32} = \lambda \ , \quad \omega_1 = \omega_{21} + \omega_{32} = -\lambda \ ;$$

$$\varepsilon_{10} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{20} = 0 \ , \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0 \ ,$$

unde elementele mişcărilor absolute ale barelor s-au notat cu un singur indice, iar pentru mişcarea absolută a barei BD, de care este legat sistemul de referinţă Bxy, indicele "0" a fost suprimat.

b) Deoarece mişcarea absolută a barei BD este compusă din 3 rotaţii în jurul axelor paralele Bz, Az_1' şi O_3z_2, rezultă că centrele instantanee relative I_{01} şi I_{12} coincid cu articulaţiile dintre barele respective, adică $I_{01} \equiv B$ şi $I_{12} \equiv A$, iar mişcarea relativă a barei BD faţă de O_3A este de translaţie circulară, datorită faptului că $\omega_{20} = \varepsilon_{20} = 0$ şi $AB = 2\ell = \text{const.}$ Se observă că teorema colinearităţii a 3 centre instantanee relative este verificată, deoarece centrul instantaneu relativ I_{20}, care ar

trebui să se găsească la intersecţia dreptelor AB şi I_2I, este aruncat la infinit, cele două drepte fiind paralele între ele. Cunoscând poziţia centrului instantaneu absolut $I_2 \equiv O_3$ pentru bara O_3A şi cele două centre instantanee relative aflate în poziţiile momentane ale articulaţiilor A şi B, se pot determina poziţiile centrelor instantanee absolute I_1 şi I pentru celelalte 2 bare prin construcţia grafică din fig. 2.6.2, de unde rezultă:

$$\frac{I_2I_{12}}{I_1I_{12}} = \frac{|\omega_1|}{\omega_2} = 1 \ , \quad O_3A = AI_1 = \ell \ ; \quad \frac{I_1I_{01}}{I\,I_{01}} = \frac{\omega}{|\omega_1|} = 1 \ , \quad I_1B = BI = 3\ell \ .$$

c) Polii acceleraţiilor J_{01}, J_{12} şi J_{20} în mişcările relative ale barelor coincid cu centrele instantanee corespunzătoare, deoarece primele 2 mişcări relative sunt de rotaţie în jurul unor axe, iar a treia este de translaţie. Cunoscând vitezele şi acceleraţiile unghiulare ale barelor în mişcările lor absolute, se observă imediat că polii acceleraţiilor în aceste mişcări coincid cu O_3 pentru toate barele mecanismului.

d) Viteza şi acceleraţia relativă a punctului M faţă de bara AB la orice moment vor fi:

$$\vec{v}_{r1} = \vec{\omega}_{10} \times \overrightarrow{BM} \ , \quad v_{r1} = 2\lambda\frac{\ell}{2} = \lambda\ell \ , \quad \vec{a}_{r1} = -\omega_{10}^2\overrightarrow{BM} \ , \quad a_{r1} = 4\lambda^2\frac{\ell}{2} = 2\lambda^2\ell \ ,$$

iar elementele corespunzătoare ale mişcării sale relative faţă de O_3A vor fi exprimate de viteza şi acceleraţia relativă a punctului B în mişcarea barei AB faţă de O_3A:

$$\vec{v}_{r2} = \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{AB} \ , \quad v_{r2} = 2\lambda \cdot 2\ell = 4\lambda\ell \ , \quad \vec{a}_{r2} = -\omega_{21}^2\overrightarrow{AB} \ , \quad a_{r2} = 4\lambda^2 \cdot 2\ell = 8\lambda^2\ell \ .$$

Pentru determinarea elementelor cerute în enunţ ale mişcării absolute a punctului M, se pot calcula elementele mişcărilor de transport ale barelor AB şi O_3A, precum şi acceleraţiile complementare, după care se aplică formulele de compunere a vitezelor şi acceleraţiilor în mişcarea relativă a unui punct material. Deoarece s-au determinat parametrii cinematici în mişcarea absolută a barei BD, este mai uşor să se calculeze viteza şi acceleraţia absolută a punctului M pe baza distribuţiilor de viteze şi acceleraţii în mişcarea plană a acestei bare, astfel încât, la momentul t_1, rezultă:

$$\vec{v}_a = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IM} \ , \quad v_a = \frac{\sqrt{37}}{2}\lambda\ell \ ;$$

$$\vec{a}_a = -\omega^2\overrightarrow{JM} \ , \quad a_a = \frac{\sqrt{13}}{2}\lambda^2\ell \ .$$

Observaţie. Se pot păstra parţial notaţiile din fig. 2.4.12 pentru sistemul de referinţă fix $O_0x_0y_0$ în loc de $O_1x_1y_1$ şi pentru unghiul θ_1 dacă se face o numerotare inversă a barelor mecanismului şi a unghiurilor de rotaţie corespunzătoare. În acest caz, manivela O_0A devine primul corp al mecanismului şi de ea se leagă sistemul de

referință $O_0x_1y_1$, al doilea corp va fi bara AB cu sistemul de referință legat de ea Bx_2y_2, iar cel de-al treilea corp este bara BD, de care se leagă sistemul Bx_3y_3 în loc de Bxy. De exemplu, vitezele unghiulare relative şi absolute ale barelor se vor nota astfel: ω_{23}, ω_{12}, ω_{13}; $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$, $\omega_3 = \omega = \omega_{03}$.

2.6.3. Cubul OABCDEHI cu muchiile de lungime ℓ are o mişcare compusă din 5 mişcări instantanee de rototranslație cu axele dirijate după diagonala sa OI, respectiv după diagonalele BO, DO, HO şi IE ale feţelor sale corespunzătoare, după care s-au ales versorii direcţiilor acestor axe ca în fig. 2.6.3. Cunoscând valorile algebrice momentane ale parametrilor cinematici pentru distribuţiile de viteze în cele 5 mişcări componente ale cubului, exprimate prin:

$\omega_1 = 2\sqrt{3}\lambda \sin \lambda t$,

$u_1 = 2\sqrt{3}\lambda \ell \cos \lambda t$,

$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{2}\lambda \sin \lambda t$,

$\omega_5 = -\sqrt{2}\lambda$,

$u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = \sqrt{2}\lambda \ell \cos \lambda t$,

unde λ este o constantă pozitivă dată, să se determine:

a) parametrii cinematici pentru distribuţiile de viteze şi acceleraţii în mişcarea absolută a cubului;

b) vitezele şi acceleraţiile absolute ale vârfurilor cubului la un moment t al mişcării sale.

Rezolvare

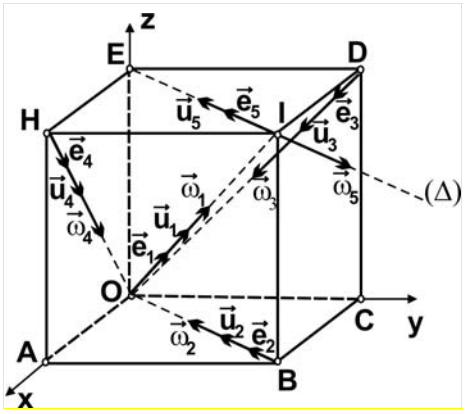


Fig. 2.6.3

a) Din enunţ rezultă că mişcarea absolută a cubului, de care s-a legat sistemul de referinţă Oxyz ca în fig. 2.6.3, este compusă din mişcarea sa relativă de rototranslație faţă de un sistem mobil $O_1x_1y_1z_1$ cu axa dirijată după $\vec{e}_1$, din mişcarea acestuia, de asemenea de rototranslație, faţă de alt sistem mobil $O_2x_2y_2z_2$ cu axa dirijată după $\vec{e}_2$, ş.a.m.d., ultima sa mişcare componentă fiind tot de rototranslație faţă de sistemul de referinţă fix $O_5x_5y_5z_5$ cu axa dirijată după $\vec{e}_5$. Cu notaţiile folosite la compunerea mai multor

mişcări ale unui corp rigid, parametrii cinematici pentru distribuţiile de viteze în mişcările componente ale cubului devin:

$$\vec{\omega}_{10} = \omega_1 \vec{e}_1 = 2\lambda\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)\sin\lambda t \ , \quad \vec{u}_{10} = u_1 \vec{e}_1 = 2\lambda\ell\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)\cos\lambda t \ ,$$

$$\vec{\omega}_{21} = \omega_2 \vec{e}_2 = \lambda\left(-\vec{i} - \vec{j}\right)\sin\lambda t = -\lambda\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\sin\lambda t \ , \quad \vec{u}_{21} = \vec{u}_{54} = -\lambda\ell\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\cos\lambda t \ ,$$

$$\vec{\omega}_{32} = -\lambda\left(\vec{j} + \vec{k}\right)\sin\lambda t \ , \quad \vec{u}_{32} = -\lambda\ell\left(\vec{j} + \vec{k}\right)\cos\lambda t \ ,$$

$$\vec{\omega}_{43} = -\lambda\left(\vec{i} + \vec{k}\right)\sin\lambda t \ , \quad \vec{u}_{43} = -\lambda\ell\left(\vec{i} + \vec{k}\right)\cos\lambda t \ ,$$

$$\vec{\omega}_{54} = \lambda\left(\vec{i} + \vec{j}\right) \ , \quad \vec{u}_{54} = -\lambda\ell\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\cos\lambda t = \vec{u}_{21} \ ,$$

astfel încât, în mişcarea sa absolută, parametrii cinematici pentru distribuţiile de viteze şi acceleraţii vor fi:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{50} = \sum_{i=0}^{4} \vec{\omega}_{i+1,i} = \vec{\omega}_{54} = \lambda\left(\vec{i} + \vec{j}\right) \ ,$$

$$\vec{v}_{50} = \sum_{i=0}^{4} \left(\vec{u}_{i+1,i} + \vec{\omega}_{i+1,i} \times \vec{r}_{10}\right) = \vec{u}_{54} + \vec{\omega}_{54} \times \overline{IO} =$$

$$= \lambda\ell\left(-\left(1 + \cos\lambda t\right)\vec{i} + \left(1 - \cos\lambda t\right)\vec{j}\right) = \vec{v}_O \, ,$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \vec{0} \ , \quad \vec{a}_O = \frac{\partial\vec{v}_O}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v}_O = \lambda^2\ell\left(\sin\lambda t\,\vec{i} + \sin\lambda t\,\vec{j} + 2\vec{k}\right) \ ,$$

deoarece se observă că primele 4 mişcări instantanee de rototranslaţie, componente ale mişcării absolute ale cubului, au axele concurente în O şi sumele vectoriale ale parametrilor cinematici pentru distribuţiile de viteze ale acestora sunt nule. Ca urmare, mişcarea absolută a cubului va fi de rototranslaţie faţă de axa fixă (Δ) trecând prin punctele sale I şi E cu parametrii cinematici pentru distribuţiile de viteze şi acceleraţii exprimaţi prin:

$$\vec{\omega} = \lambda\left(\vec{i} + \vec{j}\right) \ , \quad \vec{u} = -\lambda\ell\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\cos\lambda t \ , \quad \vec{\varepsilon} = \vec{0} \ , \quad \vec{w} = \lambda^2\ell\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\sin\lambda t \ .$$

Evident, la momentele în care se anulează viteza de alunecare, distribuţia de viteze a cubului în mişcarea sa absolută va fi de rotaţie în jurul axei (Δ), iar la momentele în care se anulează acceleraţia de alunecare, distribuţia sa de acceleraţii va fi de rotaţie în jurul aceleiaşi axe.

b) Vitezele absolute ale vârfurilor cubului vor fi:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_B = \lambda\ell\left(-\left(1 + \cos\lambda t\right)\vec{i} + \left(1 - \cos\lambda t\right)\vec{j}\right) \, ,$$

$$\vec{v}_A = \lambda\ell\left(-\left(1 + \cos\lambda t\right)\vec{i} + \left(1 - \cos\lambda t\right)\vec{j} - \vec{k}\right) \, ,$$

$$\vec{v}_C = \lambda\ell\left(-(1+\cos\lambda t)\vec{i} + (1-\cos\lambda t)\vec{j} + \vec{k}\right), \quad \vec{v}_D = \lambda\ell\left(-(\vec{i}+\vec{j})\cos\lambda t + \vec{k}\right),$$

$$\vec{v}_E = \vec{v}_I = -\lambda\ell(\vec{i}+\vec{j})\cos\lambda t, \quad \vec{v}_H = -\lambda\ell\left((\vec{i}+\vec{j})\cos\lambda t + \vec{k}\right),$$

iar acceleraţiile lor absolute rezultă:

$$\vec{a}_O = \vec{a}_B = \lambda^2\ell\left((\vec{i}+\vec{j})\sin\lambda t + 2\vec{k}\right), \quad \vec{a}_A = \lambda^2\ell\left((-1+\sin\lambda t)\vec{i} + (1+\sin\lambda t)\vec{j} + 2\vec{k}\right),$$

$$\vec{a}_C = \lambda^2\ell\left((1+\sin\lambda t)\vec{i} + (-1+\sin\lambda t)\vec{j} + 2\vec{k}\right),$$

$$\vec{a}_D = \lambda^2\ell\left((1+\sin\lambda t)\vec{i} + (-1+\sin\lambda t)\vec{j}\right),$$

$$\vec{a}_E = \vec{a}_I = \lambda^2\ell(\vec{i}+\vec{j})\sin\lambda t, \quad \vec{a}_H = \lambda^2\ell\left((-1+\sin\lambda t)\vec{i} + (1+\sin\lambda t)\vec{j}\right).$$

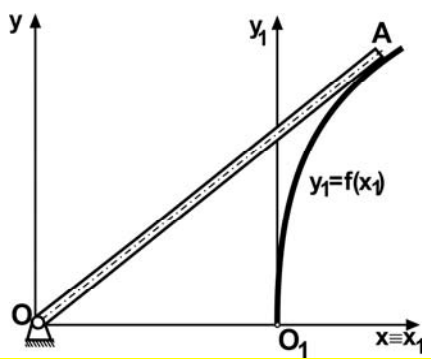


Fig. 2.6.4

2.6.4. O placă plană, având ecuaţia curbei ce o delimitează faţă de planul de referinţă $O_1x_1y_1$ legat de ea exprimată prin $y_1 = f(x_1)$, are o mişcare de translaţie rectilinie în planul fix Oxy, astfel încât axa O_1x_1 se mişcă pe Ox după legea $OO_1 = \ell(1-\lambda t)$, λ fiind o constantă pozitivă cunoscută. Manivela OA de lungime ℓ este articulată în O şi se sprijină cu celălalt capăt pe curba ce delimitează placa plană considerată.

a) Să se determine viteza unghiulară a manivelei în funcţie de abscisa x_1 a punctului A şi să se exprime x_1 ca funcţie de timp şi de f.

b) Să se determine funcţia f astfel încât viteza unghiulară a manivelei să fie constantă, de valoare λ, dacă O_1 se află pe curba $y_1 = f(x_1)$.

Răspunsuri

a) $\omega = \dfrac{\lambda\ell f'}{f f' + \sqrt{\ell^2 - f^2}}$, $x_1 = \ell(\lambda t - 1) + \sqrt{\ell^2 - f^2}$.

b) $x_1 + \ell = \ell \arcsin\dfrac{f}{\ell} + \sqrt{\ell^2 - f^2}$.

2.6.5. Un disc circular de rază R se rostogoleşte fără alunecare în planul $O_1x'z'$ pe axa O_1x', astfel încât centrul său O porneşte de pe axa O_1z' şi se mişcă

uniform pe o dreaptă paralelă cu O_1x' cu viteza de valoare $v_O = \lambda R$. În acelaşi timp, planul mişcării discului are o mişcare de rotaţie uniformă în jurul axei fixe $O_1z_1 \equiv O_1z'$ după legea $\theta_1 = \lambda t$, unghiul θ_1 fiind măsurat în planul fix $O_1x_1y_1$ între axele O_1x_1 şi O_1x' ca în fig. 2.6.5. La un moment t al mişcării discului, să se determine:

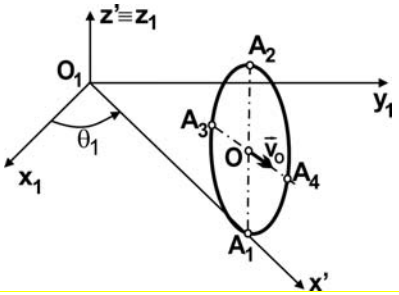


Fig. 2.6.5

a) viteza unghiulară, acceleraţia unghiulară, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor în mişcarea sa relativă;

b) viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară în mişcarea sa absolută;

c) valorile vitezelor şi acceleraţiilor absolute ale punctelor sale A_1, A_2, A_3 şi A_4, situate la momentul considerat pe periferia sa la capetele diametrelor $A_1A_2 \| O_1z'$ şi $A_3A_4 \| O_1x'$.

Răspunsuri

a) $\vec{\omega}_r = \lambda\vec{j}'$, $\vec{\varepsilon}_r = \vec{0}$, $I_r \equiv A_1$, $J_r \equiv O$;

b) $\vec{\omega}_a = \lambda\left(\vec{j}' + \vec{k}'\right)$, $\vec{\varepsilon}_a = -\lambda^2\vec{i}'$;

c) $v_1 = \lambda^2 Rt$, $v_2 = \lambda R\sqrt{4+\lambda^2t^2}$, $v_3 = \lambda R\sqrt{2+(\lambda t-1)^2}$,
$v_4 = \lambda R\sqrt{2+(\lambda t+1)^2}$; $a_1 = \lambda^2 R\sqrt{1+\lambda^2t^2}$, $a_2 = \lambda^2 R\sqrt{17+\lambda^2t^2}$,
$a_3 = \lambda^2 R\sqrt{4+(\lambda t-2)^2}$, $a_4 = \lambda^2 R\sqrt{4+(\lambda t+2)^2}$.

2.6.6. Bara AB de lungime 4R, de care s-a legat sistemul de referinţă Ox′y′z′ ca în fig. 2.6.6, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât capetele sale se mişcă pe axele de coordonate şi unghiul dintre axele Oy′ şi O_1y_1 variază în timp după legea $\theta_1 = \lambda t$, unde λ este o constantă pozitivă cunoscută. La mijlocul O al barei este montat printr-un rulment cu bile un disc circular de rază R, care are o mişcare de rotaţie uniformă faţă de bară cu viteza unghiulară $\omega_r = 2\lambda$, orientată ca în figură.

a) Să se determine viteza unghiulară, acceleraţia unghiulară, centrul instantaneu de rotaţie şi polul acceleraţiilor în mişcarea de transport a discului.

b) Să se exprime viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară în mişcarea absolută a discului prin proiecţii pe axele sistemului de referinţă legat de bară.

c) Să se calculeze valorile vitezelor şi acceleraţiilor absolute ale punctelor sale A_1, A_2, A_3 şi A_4 de pe periferia discului la momentul $t_1 = \pi/4\lambda$, când A_1 şi A_2 se găsesc pe axa Oz′, iar A_3 şi A_4 pe Ox′.

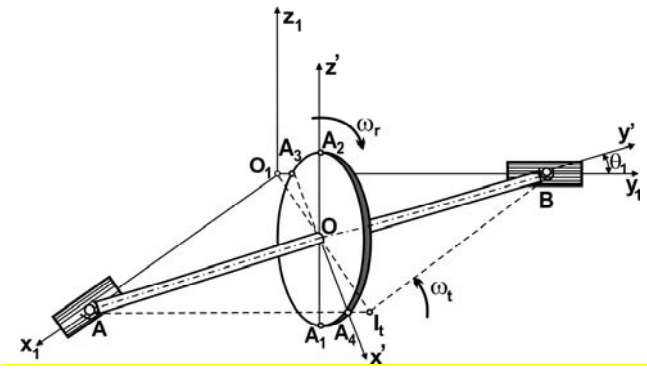


Fig. 2.6.6

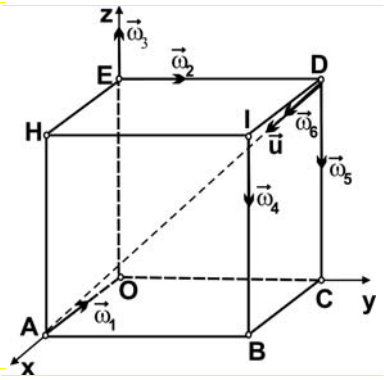


Fig. 2.6.7

Răspunsuri

a) $\vec{\omega}_t = \lambda\vec{k}'$, $\vec{\varepsilon}_t = \vec{0}$,
$O_1I_t = 2OI_t = 4R$, $J_t \equiv O_1$.

b) $\vec{\omega}_a = 2\lambda\vec{j}' + \lambda\vec{k}'$,
$\vec{\varepsilon}_a = -2\lambda^2\vec{i}'$.

c) $v_1 = v_2 = 2\sqrt{2}\lambda R$, $v_3 = \sqrt{13}\lambda R$, $v_4 = \sqrt{5}\lambda R$;
$a_1 = a_2 = 6\lambda^2 R$, $a_3 = 3\lambda^2 R$, $a_4 = 7\lambda^2 R$.

2.6.7. Un cub cu muchiile de lungime ℓ are o mişcare compusă din 5 rotaţii în jurul unor axe dirijate după muchii ale sale ca în fig. 2.6.7 şi dintr-o mişcare instantanee de rototranslaţie în raport cu axa dirijată după diagonala sa DA. Ştiind că parametrii cinematici pentru distribuţiile de viteze în mişcările componente ale cubului au valorile:

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_4 = \omega_5 = \lambda$, $\omega_3 = 3\lambda$, $\omega_6 = \sqrt{3}\lambda$, $u = \sqrt{3}\lambda\ell$,

unde λ este o constantă pozitivă cunoscută, să se determine parametrii cinematici pentru distribuţiile de viteze şi de acceleraţii în mişcarea sa absolută.

Răspunsuri

$\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} = \vec{0}$, $\vec{v}_O = -\lambda\ell\left(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$, $v_O = 3\lambda\ell$, $\vec{a}_O = \vec{0}$.

2.6.8. Un cub cu muchiile de lungime ℓ are o mişcare compusă din 6 rotaţii în jurul unor axe dirijate după muchii ale sale ca în fig. 2.6.8. Ştiind că vitezele unghiulare în mişcările componente ale cubului au aceeaşi valoare constantă λ dată, să se determine:

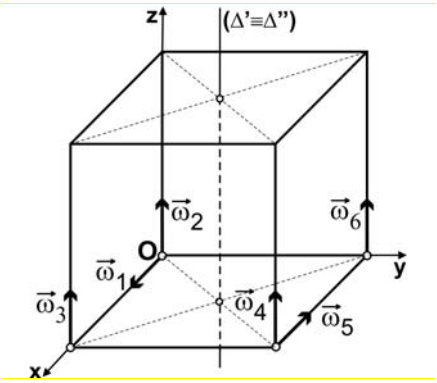


Fig. 2.6.8

a) parametrii cinematici pentru distribuţiile de viteze şi de acceleraţii în mişcarea sa absolută, exprimaţi prin proiecţii pe axele sistemului de referinţă Oxyz legat de cub, având axa Ox dirijată după $\vec{\omega}_1$ şi celelalte axe după celelalte 2 muchii concurente în O;

b) viteza absolută şi acceleraţia absolută de alunecare a cubului, precum şi ecuaţiile axelor instantanee de rototranslaţie sau de rotaţie faţă de sistemul de referinţă legat de el.

Răspunsuri

a) $\vec{\omega} = 4\lambda\vec{k}$, $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$,
$\vec{v}_O = \lambda\ell\left(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right)$, $\vec{a}_O = 8\lambda^2\ell\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$;

b) $\vec{u} = \lambda\ell\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{0}$;
(Δ') , (Δ'') $x = y = \dfrac{\ell}{2}$.

2.6.9. Mecanismul din fig. 2.6.9, format din 3 bare identice de lungime 2ℓ fiecare, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât unghiurile din figură variază în timp după legile:

$$\theta_1 = \theta_2 = \lambda t \ , \theta_3 = -2\lambda t \ ,$$

unde λ este o constantă pozitivă cunoscută.

a) Să se determine viteza unghiulară, accelerația unghiulară, centrul instantaneu de rotație şi polul accelerațiilor în mişcarea absolută a barei AB.

b) Să se arate că mişcarea absolută a barei BD este de translație şi să se calculeze viteza absolută şi accelerația absolută a unui punct M de pe ea la un moment t al mişcării.

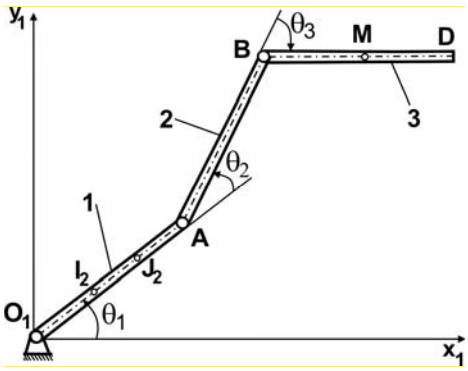


Fig. 2.6.9

Răspunsuri

a) $\omega_2 = \omega_{12} + \omega_{23} = 2\lambda$, $\varepsilon_2 = 0$,

$O_1I_2 = I_2A = \ell$, $O_1J_2 = 3J_2A = \dfrac{3\ell}{2}$.

b) $\omega_3 = \varepsilon_3 = 0$,

$v_M = 2\lambda\ell\sqrt{5+4\cos\lambda t}$,

$a_M = 2\lambda^2\ell\sqrt{17+8\cos\lambda t}$.

2.6.10. Mecanismul din fig. 2.6.10, format din 5 bare identice de lungime 4ℓ fiecare, se mişcă în planul fix $O_1x_1y_1$ astfel încât unghiurile din figură variază în timp după legile:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = \theta_5 = \lambda t \ ,$$
$$\theta_3 = -4\lambda t \ ,$$

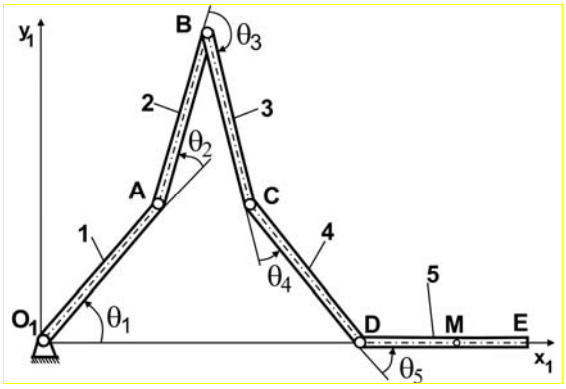


Fig. 2.6.10

unde λ este o constantă pozitivă cunoscută.

Să se determine:

a) vitezele unghiulare relative şi absolute ale barelor;

b) centrele instantanee de rotație şi polii accelerațiilor pentru barele 2 (AB), 3 (BC) şi 4 (CD) în mişcările lor relative una față de alta, precum şi în mişcările lor absolute;

c) valorile vitezei şi acceleraţiei absolute ale unui punct M de pe bara 5 (DE) la un moment t al mişcării.

Răspunsuri

a) $\omega_{23}=\omega_{45}=\omega_{56}=\lambda$, $\omega_{34}=-4\lambda$, $\omega_{24}=\omega_{35}=-3\lambda$,
$\omega_{25}=\omega_{36}=-2\lambda$, $\omega_{26}=-\lambda$, $\omega_{46}=2\lambda$;
$\omega_1=\lambda$, $\omega_2=2\lambda$, $\omega_3=-2\lambda$, $\omega_4=-\lambda$, $\omega_5=0$;

b) $I_{23}\equiv J_{23}\equiv B$, $I_{34}\equiv J_{34}\equiv C$, $I_{24}\equiv J_{24}$,
$B\in CI_{24}$, $BI_{24}=\dfrac{4\ell}{3}$;
$O_1I_2=AI_2=2\ell$, $J_2\in O_1A$, $AJ_2=\ell$,
$BI_2=BI_3=2\ell\sqrt{(\cos\lambda t+2\cos 2\lambda t)^2+(\sin\lambda t+2\sin 2\lambda t)^2}$,
$J_3\equiv J_2$,
$I_4\left(8\ell\cos\lambda t+8\ell\cos 2\lambda t,8\ell\sin\lambda t+16\ell\sin 2\lambda t\right)$,
$J_4\left(-24\ell\cos 2\lambda t,0\right)$;

c) $v_M=8\lambda\ell\left(\sin\lambda t+2\sin 2\lambda t\right)$,
$a_M=8\lambda^2\ell\left(\cos\lambda t+4\cos 2\lambda t\right)$.

3.1. Dinamica punctului material

3.1.1. Să se demonstreze legile lui Kepler, enunțate mai jos, privind mişcarea planetelor în jurul Soarelui, pe baza studiului mişcării unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale de atracție newtoniană.

a) Traiectoria oricărei planete este o elipsă, având Soarele într-unul din focarele sale.

b) Raza vectoare a unei planete descrie arii egale în intervale de timp egale.

c) Raportul dintre pătratul timpului de revoluție şi cubul semiaxei mari a traiectoriei este acelaşi pentru toate planetele.

Rezolvare

Cea de-a doua lege a lui Kepler, enunțată la b), rezultă imediat din legea ariilor, valabilă în mişcarea unui punct material sub acțiunea oricărei forțe centrale. Conform acestei legi, mişcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale este plană, având viteza areolară constantă de valoare $c/2$.

Pentru determinarea traiectoriei punctului material, aflat în mişcare sub acțiunea unei forțe de atracție newtoniană, se aplică ecuația lui Binet, care exprimă ecuația diferențială a traiectoriei în coordonate polare. În cazul mişcării unei planete în jurul Soarelui, ecuația lui Binet devine:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=-\left(-\frac{kMm}{r^2}\right)\frac{r^2}{mc^2}\ ,$$

unde k este constanta atracției universale, M este masa Soarelui, iar m este masa planetei. Se observă că în membrul drept al acestei ecuații se obține o constantă pozitivă, care se notează cu $1/p$, astfel încât rezultă:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta-\theta_0)\ ,\quad r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}\quad (1)\ ,\quad p=\frac{c^2}{kM}\ ,$$

unde ε şi θ_0 sunt constante de integrare. Relația (1) reprezintă ecuația unei conice în coordonate polare, având focarul în centrul atractiv O, excentricitatea ε şi parametrul p. Natura conicii depinde de excentricitatea sa, care este o constantă de integrare, astfel încât, pentru determinarea ei, se consideră ca poziție inițială a planetei o poziție în care

unghiul polar θ este luat nul şi raza vectoare r_0, viteza v_0 şi unghiul α dintre ele sunt presupuse cunoscute. Deoarece viteza radială a planetei se poate exprima prin:

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2}{p}\varepsilon\sin(\theta-\theta_0)\frac{c}{r^2} = \frac{c\varepsilon}{p}\sin(\theta-\theta_0) ,$$

condiţiile iniţiale considerate conduc la ecuaţiile:

$$r_0 = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta_0} , \quad v_0\cos\alpha = -\frac{c\varepsilon}{p}\sin\theta_0 ,$$

din care rezultă:

$$\varepsilon\cos\theta_0 = \frac{p}{r_0} - 1 , \quad \varepsilon\sin\theta_0 = -\frac{p}{r_0}\mathrm{ctg}\alpha , \quad p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{kM} ,$$

$$\mathrm{tg}\theta_0 = \frac{r_0 v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{kM - r_0 v_0^2 \sin^2\alpha} , \quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{k^2M^2}\left(v_0^2 - 2\frac{kM}{r_0}\right)} \quad (2) .$$

Pe baza relaţiei (2) se poate determina natura conicii:

– pentru $v_0 = \sqrt{kM/r_0}$ şi $\alpha = \pm\pi/2$ se obţine $\varepsilon = 0$, deci traiectoria planetei este un cerc;

– pentru $\sqrt{kM/r_0} < v_0 < \sqrt{2kM/r_0}$ (3) se obţine $0 < \varepsilon < 1$, deci traiectoria planetei va fi o elipsă;

– pentru $v_0 \geq \sqrt{2kM/r_0}$ rezultă $\varepsilon \geq 1$, deci un punct material care atinge sau depăşeşte această viteză în sistemul solar va părăsi acest sistem pe o ramură tinzând spre infinit a unei parabole, respectiv a unei hiperbole.

Traiectoriile planetelor din sistemul solar nu pot avea ramuri tinzând spre infinit, astfel încât aceste traiectorii pot fi numai elipse. Într-adevăr, pe baza observaţiilor şi măsurătorilor astronomice s-a constatat că în orice poziţie a unei planete pe traiectoria sa sunt verificate relaţiile (3). În cazul planetei Mercur, care este cea mai apropiată de Soare, se obţine o valoare foarte mică a excentricităţii, deci traiectoria sa este foarte apropiată de un cerc.

Pentru a demonstra cea de-a treia lege a lui Kepler, enunţată la c), este necesar să se calculeze lungimea a a semiaxei mari a traiectoriei unei planete şi timpul său T de revoluţie. Pe baza relaţiei (1), pentru $\cos(\theta-\theta_0) = \pm 1$, se pot determina valorile extreme ale razei vectoare, astfel încât rezultă:

$$2a = \frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} , \quad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} , \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{ap} ,$$

unde b este lungimea semiaxei mici. Perioada de revoluţie a planetei se determină din legea ariilor:

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=c\ ,\qquad T=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{c}d\theta=\frac{2\pi ab}{c}=\frac{2\pi a\sqrt{a}}{c}\sqrt{\frac{c^2}{kM}}=\frac{2\pi}{\sqrt{kM}}a^{3/2}\ ,$$

de unde, prin ridicare la pătrat şi împărţire cu a^3, se obţine relaţia care demonstrează această lege.

3.1.2. Un corp punctiform paralelipipedic de masă m este aruncat cu viteza iniţială de valoare v_0 pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de planul orizontal. Se cunosc unghiul β dintre viteza iniţială şi orizontala corespunzătoare a planului înclinat, precum şi coeficientul de frecare μ dintre corp şi planul înclinat.

a) Să se stabilească proprietăţile mişcării corpului pe planul înclinat în funcţie de $\beta\in(0,\pi/2]$ şi $\mu\in(0,2\mathrm{tg}\alpha]$.

b) Pentru $\beta=\pi/2$ şi $\mu=\mathrm{tg}\alpha$ să se determine legea de mişcare a corpului pe planul înclinat.

c) Pentru $\alpha=\pi/6$, $\beta=\pi/3$ şi $\mu=\sqrt{3}/3$ să se arate că traiectoria corpului admite o asimptotă paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat şi să se determine ecuaţia asimptotei şi viteza corpului pe ramura asimptotică a traiectoriei sale.

Rezolvare

a) În fig. 3.1.2 s-a reprezentat sistemul de referinţă fix Oxyz legat de planul înclinat, cu originea în poziţia iniţială a corpului şi cu axa Oy dirijată după linia de cea mai mare pantă a planului înclinat în sens ascendent. Într-o poziţie oarecare a corpului pe planul înclinat, asupra sa acţionează greutatea proprie $m\vec{g}$, reacţiunea normală $\vec{N}$ a planului înclinat şi forţa de frecare $\vec{F}_f$, care este situată în planul Oxy, este dirijată după tangenta la traiectorie în poziţia curentă P a corpului în sensul opus vitezei sale $\vec{v}$ şi are valoarea

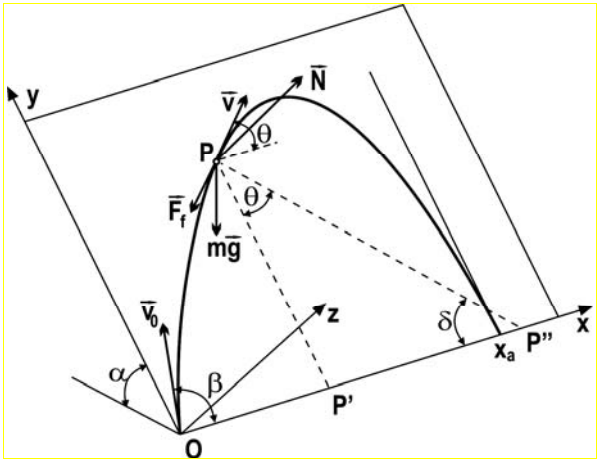


Fig. 3.1.2

μN. Ca urmare, aplicând legea fundamentală a dinamicii, ecuația diferențială vectorială a mişcării corpului pe planul înclinat devine:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} - \mu N\frac{\vec{v}}{v} ,$$

ale cărei proiecții pe axele sistemului de referință considerat sunt ecuații diferențiale nelineare, greu de integrat. Se obțin ecuații diferențiale mai uşor de integrat dacă se studiază mişcarea corpului pe planul înclinat în coordonate intrinseci față de traiectoria sa plană necunoscută, pentru care se consideră ca parametru de poziție unghiul θ dintre tangenta la traiectorie şi axa Ox, măsurat în planul Oxy. Aceste ecuații rezultă:

$$m\dot{v} = -mg\sin\alpha\sin\theta - \mu N ,$$

$$\frac{mv^2}{R_c} = mg\sin\alpha\cos\theta ,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0 ,$$

iar după înlocuirea valorii N din ultima ecuație în prima, ele devin:

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(\sin\alpha\sin\theta + \mu\cos\alpha\right) \quad (1) ,$$

$$\frac{v^2}{R_c} = g\sin\alpha\cos\theta \quad (2) ,$$

unde cu R_c s-a notat raza de curbură a traiectoriei. Pentru a se putea integra aceste ecuații diferențiale, în primul rând este necesar să se exprime R_c în funcție de θ. Pentru aceasta, notând cu δ unghiul dintre normala principală PP′′ a traiectoriei şi axa Ox, din fig. 3.1.2 rezultă:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \theta , \qquad R_c = \frac{ds}{d\delta} = -\frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -v\frac{dt}{d\theta} .$$

Înlocuind în (2) valoarea determinată pentru R_c şi apoi eliminând timpul prin împărțirea membru cu membru a ecuației (1) la cea care rezultă, se obțin ecuațiile:

$$v\frac{d\theta}{dt} = -g\sin\alpha\cos\theta \quad (3) ,$$

$$\frac{dv}{vd\theta} = tg\theta + \frac{\lambda}{\cos\theta} \quad (4) ,$$

unde $\lambda = \mu ctg\alpha$ este o constantă adimensională ce ia valori în intervalul $(0, 2]$ când μ are valorile din enunț. Ecuația (4) are variabilele separabile, deci se poate integra uşor, dar chiar fără integrarea ei se pot stabili proprietățile mişcării corpului pe planul înclinat în funcție de β şi λ în loc de μ, pe baza ecuațiilor (1), (2) şi (3).

Pentru $\beta = \pi/2$ se observă că mişcarea corpului este rectilinie pe axa Oy, deci $\theta = \pi/2$ şi din (1) rezultă:

$$v = v_0 - gt(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \qquad (5),$$

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \qquad (6).$$

Legea mişcării (6) este valabilă în timpul mişcării ascendente a corpului, pentru $t \in [0, t_u]$, unde timpul de urcare t_u se determină din (5) pentru $v = 0$. Dacă $\lambda \in (0; 1)$, deci $\mu \in (0, \mathrm{tg}\alpha)$, în mişcarea descendentă a corpului se schimbă sensul forţei de frecare şi acceleraţia corespunzătoare se obţine din (1) pentru $\theta = \pi/2$ şi $-\mu$ în loc de μ. Dacă $\lambda \in [1; 2]$, corpul se opreşte la momentul t_u şi nu va mai avea mişcare descendentă.

Pentru $\beta \in (0, \pi/2)$, traiectoria corpului în mişcarea sa pe planul înclinat va fi o curbă plană, care trebuie să verifice ecuaţiile (1), (2) şi (3). Din (2) rezultă $\cos\theta \geq 0$, egalitatea fiind îndeplinită numai dacă $R_c \to \infty$, deoarece forţa de frecare nu poate determina schimbarea sensului de mişcare pe traiectorie, astfel încât viteza nu se poate anula, decât în cazul în care $\beta = \pi/2$. Ca urmare, din (3) se obţine $d\theta \leq 0$, ceea ce arată că θ scade, în timpul mişcării corpului, de la valoarea iniţială β la $-\pi/2$, deci traiectoria sa va fi o curbă plană cu o asimptotă paralelă cu axa Oy. Din (1) rezultă că, pe ramura ascendentă a traiectoriei, când θ scade de la β la 0, viteza scade de la valoarea iniţială v_0 la o valoare ce se poate determina în urma integrării ecuaţiei (4) de la $\theta = \beta$ la $\theta = 0$. Pe ramura descendentă a traiectoriei corpului, viteza sa continuă să scadă, până când se anulează membrul drept al ecuaţiei (1), adică pentru $\sin\theta^* = -\lambda$. Pentru $\lambda \in (0; 1)$ se obţine $\theta^* \in (0, -\pi/2)$, pentru care viteza corpului este minimă, după care aceasta creşte de la valoarea minimă la o valoare tinzând spre infinit pe ramura asimptotică a traiectoriei sale. Într-adevăr, în urma integrării ecuaţiei (4):

$$\ln\frac{v}{v_0} = \int_\beta^\theta \left(\mathrm{tg}\theta + \frac{\lambda}{\cos\theta}\right)d\theta = \ln\frac{(1+\sin\theta)^\lambda}{(\cos\theta)^{\lambda+1}}\Bigg|_\beta^\theta,$$

$$v = v_0\left(\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\beta}\right)^\lambda\left(\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\right)^{\lambda+1} \qquad (7),$$

se obţine:

$$\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin\theta)^\lambda}{(\cos\theta)^{\lambda+1}} = \lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda(1+\sin\theta)^{\lambda-1}\cos\theta}{-(\lambda+1)(\cos\theta)^\lambda\sin\theta} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\quad\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^{1-\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+1} \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \right)^{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \right)^{1-\lambda} .$$

Pentru $\lambda = 1$, rezultă $\theta^* = -\pi/2$ şi limita de mai sus are valoarea finită $1/2$, deci mişcarea corpului pe ramura asimptotică a traiectoriei sale va fi uniformă. Dacă $\lambda \in (1, 2]$, se observă că membrul drept al ecuației (1) nu se poate anula, dar limita de mai sus este nulă, deoarece $1 - \lambda < 0$, astfel încât, în acest caz, viteza corpului scade tot timpul mişcării sale, până când, pe ramura descendentă a traiectoriei sale, viteza sa devine nulă şi corpul se opreşte pe planul înclinat într-o poziție care se poate determina.

Se observă că proprietățile mişcării corpului punctiform considerat pe un plan înclinat aspru sunt similare celor ale mişcării unui punct material greu în aer numai dacă $\lambda = 1$.

b) În condițiile din enunț, din (5) şi (6) rezultă că legea mişcării corpului pe axa Oy va fi:

$$y = v_0 t - g t^2 \sin\alpha \ , \quad t \in [0, t_u] \ , \quad t_u = \frac{v_0}{2g\sin\alpha} \ ,$$

deci corpul se opreşte în poziția:

$$y_{max} = y(t_u) = \frac{v_0^2}{4g\sin\alpha} \ .$$

c) Pentru datele din enunț se obține $\lambda = 1$ şi din analiza efectuată la punctul a) rezultă că traiectoria corpului admite o asimptotă paralelă cu axa Oy, care va avea ecuația $x = x_a$. Pentru a determina abscisa x_a a asimptotei şi viteza v_a a corpului pe ramura asimptotică a traiectoriei sale se folosesc ecuațiile (3) şi (7), din care rezultă:

$$dx = v\cos\theta dt = -v\cos\theta \frac{v d\theta}{g\sin\alpha\cos\theta} = -\frac{7-2\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}\frac{d\theta}{(1-\sin\theta)^2} \ , \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = u \ ,$$

$$x = -\frac{7-2\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}\int_{\pi/3}^{\theta}\frac{d\theta}{(1-\sin\theta)^2} = -\frac{7-2\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}\cdot\frac{2}{3}\left.\frac{3(1-u)^2-3(1-u)+2}{(1-u)^3}\right|_{\sqrt{3}/3}^{u} ,$$

$$x_a = \lim_{u\to -1} x = \frac{4-\sqrt{3}}{6}\frac{v_0^2}{g} = 0{,}378\frac{v_0^2}{g} \ , \qquad v_a = \lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}} v = \frac{2-\sqrt{3}}{4}v_0 = 0{,}067 v_0 \ .$$

3.1.3. O placă pătrată, de grosime cunoscută, are o mişcare de translaţie rectilinie şi uniform accelerată într-un plan vertical, pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat cu unghiul $\alpha = \pi/6$ faţă de planul orizontal. Pe placă este practicat un canal circular de rază R cu centrul în centrul său O, în care se poate mişca fără frecare o bilă de masă m. Ştiind că acceleraţia plăcii are valoarea $a = g$, g fiind acceleraţia gravitaţională, să se determine poziţia de repaus relativ a bilei, reacţiunea canalului asupra sa în poziţia sa de repaus relativ, precum şi perioada micilor oscilaţii în jurul poziţiei sale de repaus relativ, dacă mişcarea plăcii pe planul înclinat are loc în sensul:

a) ascendent;
b) descendent.

Rezolvare

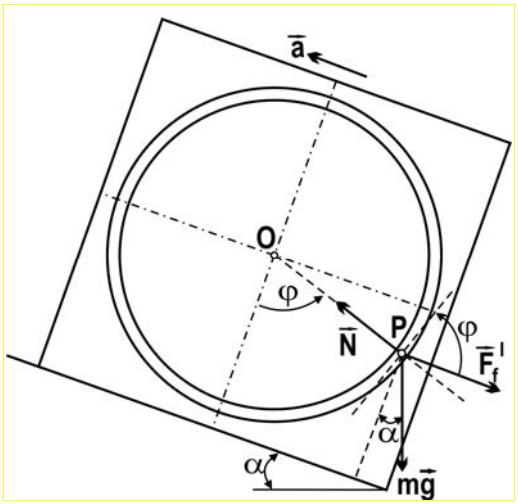


Fig. 3.1.3

a) În fig. 3.1.3 s-au reprezentat forţele ce acţionează asupra bilei în timpul unei mişcări relative faţă de placă, în cazul în care placa se mişcă pe planul înclinat în sensul ascendent. Ca parametru de poziţie al bilei în timpul mişcării sale relative s-a considerat unghiul φ dintre raza curentă OP şi normala la planul înclinat. În acest caz, legea fundamentală a dinamicii mişcării relative a unui punct material se exprimă prin:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_t^I \ ,$$

unde forţa inerţială de transport are valoarea ma. Proiecţiile acestei ecuaţii vectoriale pe tangenta şi pe normala principală la traiectoria relativă conduc la ecuaţiile:

$$mR\ddot{\varphi} = ma\cos\varphi - mg\sin(\varphi - \alpha) \ , \quad (1)$$

$$mR\dot{\varphi}^2 = N - ma\sin\varphi - mg\cos(\varphi - \alpha) \ ,$$

din care, pentru poziţia de repaus relativ a bilei şi datele din enunţ, rezultă:

$$\cos\varphi_r - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi_r + \frac{1}{2}\cos\varphi_r = 0 \ , \quad \varphi_r = \frac{\pi}{3} \ , \quad N(\varphi_r) = \sqrt{3}mg \ .$$

Pentru determinarea perioadei micilor oscilaţii ale bilei în jurul poziţiei sale de repaus relativ, în ecuaţia (1) se înlocuieşte $\varphi = \varphi_r + \theta$, unde θ este un nou parametru de poziţie, astfel încât rezultă:

$$R\ddot{\theta} = g\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right) , \quad \ddot{\theta} + \sqrt{3}\frac{g}{R}\sin\theta = 0 ,$$

$$\sin\theta = \theta , \qquad \ddot{\theta} + \sqrt{3}\frac{g}{R}\theta = 0 , \qquad \omega = \sqrt{\sqrt{3}\frac{g}{R}} , \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{R}{g}} .$$

b) Dacă placa se mişcă pe planul înclinat în sensul descendent, forţele ce acţionează asupra bilei în timpul mişcării sale relative vor fi aceleaşi, numai sensul forţei inerţiale de transport se schimbă, aceasta având sensul contrar celui din fig. 3.1.3. În acest caz, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării relative a bilei devin:

$$R\ddot{\varphi} = -g\cos\varphi - g\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) , \qquad (2)$$

$$mR\dot{\varphi}^2 = N + mg\sin\varphi - mg\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) ,$$

din care se determină:

$$-\cos\varphi_r' - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi_r' + \frac{1}{2}\cos\varphi_r' = 0 , \quad \varphi_r' = -\frac{\pi}{6} , \quad N(\varphi_r') = mg ,$$

iar pentru această poziţie de repaus relativ din (2) rezultă:

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{6} , \quad R\ddot{\theta} = -g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) ,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0 , \quad \sin\theta = \theta , \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0 , \quad \omega' = \sqrt{\frac{g}{R}} , \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} .$$

Observaţie. Poziţia de repaus relativ a bilei, în fiecare din cele două cazuri de mişcare a plăcii pe planul înclinat, se mai poate determina cu ajutorul construcţiei geometrice a rezultantei dintre greutatea bilei şi forţa inerţială de transport, care va fi un vector constant şi în poziţia de repaus relativ trebuie să fie echilibrată de reacţiunea normală a canalului asupra bilei. Astfel, în cazul a), această rezultantă are valoarea $\sqrt{3}mg$ şi formează unghiul $\pi/3$ cu normala la planul înclinat. Se mai poate determina şi perioada micilor oscilaţii ale bilei în jurul poziţiei sale de repaus relativ, care trebuie să fie egală cu perioada micilor oscilaţii ale unui pendul matematic de lungime R într-

un câmp gravitațional uniform cu accelerația $\sqrt{3}g$. Pentru cazul b), aceste elemente ale mişcării relative a bilei se pot determina în mod analog.

3.1.4. În absența câmpului gravitațional, un punct material se mişcă în planul Oxy sub acțiunea unei forțe de atracție din partea axei Ox, care este proporțională cu masa m a punctului şi cu distanța la axa Ox, factorul de proporționalitate fiind k^2. Ştiind că, la momentul inițial al mişcării, punctul material se găseşte în poziția $A_0(0, h)$ şi are viteza inițială de valoare v_0 paralelă cu axa Ox, să se determine:

a) legea mişcării punctului material şi ecuația traiectoriei sale;

b) valorile extreme ale vitezei punctului material şi pozițiile sale corespunzătoare pe traiectorie. Ce direcție față de traiectorie şi ce valoare are accelerația sa în aceste poziții?

Răspunsuri

a) $x = v_0 t$, $y = h\cos kt$;

$y = h\cos\dfrac{kx}{v_0}$;

b) $v_{min} = v_0$ în pozițiile $A_0(0, h)$, $A_2\left(\dfrac{\pi v_0}{k}, -h\right)$, $A_4\left(\dfrac{2\pi v_0}{k}, h\right)$, ... ;

$v_{max} = \sqrt{v_0^2 + k^2h^2}$ în pozițiile $A_1\left(\dfrac{\pi v_0}{2k}, 0\right)$, $A_3\left(\dfrac{3\pi v_0}{2k}, 0\right)$, $A_5\left(\dfrac{5\pi v_0}{k}, h\right)$, ...

În poziția în care viteza punctului material este minimă, accelerația sa are valoare maximă $a_{max} = k^2h$ şi este dirijată după normala la traiectorie, deoarece în aceste poziții $a_\tau = \dot{v} = 0$. În pozițiile în care viteza punctului este maximă accelerația sa are valoarea minimă $a_{min} = 0$, deoarece în aceste poziții şi accelerația sa normală $a_n = \dfrac{v^2}{R_C}$ este nulă ($R_C \to \infty$).

3.1.5. În absența câmpului gravitațional, un punct material se mişcă în planul Oxy sub acțiunea unor forțe de atracție din partea axelor de coordonate, care sunt proporționale cu masa m a punctului şi cu distanțele corespunzătoare la axele de coordonate, factorul de proporționalitate fiind k^2. Ştiind că, la momentul inițial al

mişcării, punctul material se află în poziția $A_0(h, 0)$ şi are viteza inițială de valoare $v_0 = 2kh$ paralelă cu axa Oy, să se determine:

a) legea mişcării punctului material şi ecuația traiectoriei sale;

b) valorile extreme ale vitezei punctului material şi pozițiile sale corespunzătoare pe traiectorie. Ce direcție față de traiectorie şi ce valoare are accelerația sa în aceste poziții?

Răspunsuri

a) $x = h\cos kt$, $y = 2h\sin kt$;

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{4h^2} = 1 \ ;$$

b) $v_{max} = v_O = 2kh$ în pozițiile $A_0(h, 0)$ şi $A_2(-h,0)$;

$v_{min} = kh$ în pozițiile $A_1(0,2h)$ şi $A_3(0,-2h)$.

În aceste poziții, avem accelerația tangențială a punctului $a_\tau = \dot{v} = 0$, deci accelerația sa va fi dirijată după normala principală la traiectoria sa eliptică şi va avea una din cele două valori extreme: $a_{min} = k^2h$, respectiv $a_{max} = 2k^2h$.

3.1.6. Un punct material P de masă m se mişcă în planul vertical Oxy, cu axa Ox verticală orientată în sens descendent, sub acțiunea greutății sale şi a unei forțe de natură elastică, exprimată prin $\vec{F} = -k\overline{OP}$. Ştiind că, la momentul inițial al mişcării, punctul material se află în repaus în poziția $A(0, d)$, să se determine:

a) legea mişcării punctului material şi ecuația traiectoriei sale;

b) intervalul de timp al mişcării sale din poziția inițială până în poziția B, în care traiectoria intersectează axa Ox, valorile vitezei şi accelerației sale în poziția B.

Răspunsuri

a) $x = \frac{g}{\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t)$, $y = d\cos\omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $y = d\left(1 - \frac{\omega_0^2}{g}x\right)$;

b) $t_{AB} = \frac{\pi}{2\omega_0}$, $v_B = \frac{\sqrt{g^2 + d^2\omega_0^4}}{\omega_0}$, $a_B = 0$.

3.1.7. Un punct material P de masă m se mişcă în planul vertical Oxy, cu axa Oy verticală orientată în sens ascendent, sub acţiunea greutăţii sale şi a două forţe de natură elastică, exprimate prin $\vec{F}_1 = -k\overline{AP}$ şi $\vec{F}_2 = -k\overline{BP}$, punctele A şi B fiind situate pe axa Ox la aceeaşi distanţă d de O. Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, punctul material se află în O cu viteza iniţială verticală, orientată în sens ascendent, de valoare $v_0 = g\sqrt{m/(2k)}$, să se determine:

a) legea mişcării punctului material şi ecuaţia traiectoriei sale;

b) momentele la care viteza sa se anulează şi poziţiile sale pe traiectorie la aceste momente. Ce valori are acceleraţia punctului material în aceste poziţii?

Răspunsuri

a) $x = 0$, $y = \frac{g}{\omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t + \cos\omega_0 t - 1\right)$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$;

b) $t_n = (4n+1)\frac{\pi}{4\omega_0}$, $n \in N$;

$y_{max} = \frac{g}{\omega_0^2}\left(\sqrt{2}-1\right)$, $y_{min} = -\frac{g}{\omega_0^2}\left(\sqrt{2}+1\right)$;

$a_{min} = -\sqrt{2}\,g$, $a_{max} = \sqrt{2}\,g$.

3.1.8. Un mobil este aruncat de la suprafaţa Pământului cu viteza iniţială de valoare v_0, care formează unghiul α cu planul orizontal. În timpul mişcării sale, mobilul întâmpină rezistenţa aerului proporţională cu masa şi cu viteza sa, factorul de proporţionalitate fiind $1/k$.

a) Să se determine legea de mişcare a mobilului şi legea de variaţie a vitezei sale.

b) Să se verifice proprietăţile generale ale mişcării unui punct material greu în aer.

Răspunsuri

a) $x = kv_0\cos\alpha\left(1 - e^{-t/k}\right)$, $y = k\left(kg + v_0\sin\alpha\right)\left(1 - e^{-t/k}\right) - kgt$;

$v_x = v_0\cos\alpha\; e^{-t/k}$, $v_y = \left(kg + v_0\sin\alpha\right)e^{-t/k} - kg$.

b) $x_a = \lim\limits_{t\to\infty} x = kv_0\cos\alpha$, $-c = \lim\limits_{t\to\infty} v_y = -kg$.

3.1.9. Un mobil este lăsat liber de la o înălțime $h = 160$ m față de suprafața Pământului. Ştiind că, în timpul mişcării sale, mobilul întâmpină rezistența aerului proporțională cu masa şi cu pătratul vitezei sale, factorul de proporționalitate fiind $0{,}00625\ \text{m}^{-1}$, să se determine legea sa de mişcare şi valoarea vitezei sale la momentul în care ajunge la suprafața Pământului. Se va considera accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m}/\text{s}^2$.

Răspunsuri

$x = 160 \ln\left(\text{ch}\,\frac{t}{4}\right)[\text{m}]$, $\quad v_f = 37{,}64\ \text{m}/\text{s}$.

3.1.10. Un mobil este aruncat de la suprafața Pământului pe verticală în sus cu viteza inițială $v_0 = 40\ \text{m}/\text{s}$. Ştiind că, în timpul mişcării sale, mobilul întâmpină rezistența aerului proporțională cu masa şi cu pătratul vitezei sale, factorul de proporționalitate fiind $0{,}1\ \text{m}^{-1}$, să se determine legea mişcării sale ascendente şi înălțimea maximă până la care ajunge. Se va considera accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m}/\text{s}^2$.

Răspunsuri

$x = 10 \ln(\cos t + 4 \sin t)[\text{m}]$, $\quad h_{max} = 14{,}166\ \text{m}$.

3.1.11. Un punct material de masă m se mişcă sub acțiunea unei forțe centrale, care este proporțională cu masa sa şi cu raza vectoare față de centrul O, factorul de proporționalitate fiind k^2. Ştiind că, la momentul inițial al mişcării, viteza sa inițială de valoare v_0 este perpendiculară pe raza vectoare r_0, să se determine legea de mişcare, traiectoria şi legea de variație a vitezei sale în coordonate carteziene, luând axa Ox după r_0, dacă forța centrală este:

a) de atracție;
b) de respingere.

Să se verifice, în ambele cazuri, că viteza areolară a punctului material este constantă.

Răspunsuri

a) $x = r_0 \cos kt$, $y = \frac{v_0}{k} \sin kt$; $\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{k^2 y^2}{v_0^2} = 1$;

$v_x = -kr_0 \sin kt$, $v_y = v_0 \cos kt$;

b) $x = r_0 ch\, kt$, $y = \frac{v_0}{k} sh\, kt$; $\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{k^2 y^2}{v_0^2} = 1$;

$v_x = kr_0 sh\, kt$, $v_y = v_0 ch\, kt$; $\Omega = \frac{1}{2} r_0 v_0$.

3.1.12. Traiectoria unui punct material de masă m , aflat în mişcare sub acţiunea unei forţe centrale de atracţie, este un cerc de rază R ce trece prin centrul atractiv O. Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, punctul material se află în poziţia A_0 diametral opusă faţă de O şi are viteza iniţială de valoare v_0, să se exprime valorile forţei centrale şi vitezei sale în funcţie de raza vectoare faţă de O.

Răspunsuri

$F = \frac{32 m v_0^2 R^4}{r^5}$, $v = \frac{4 v_0 R^2}{r^2}$.

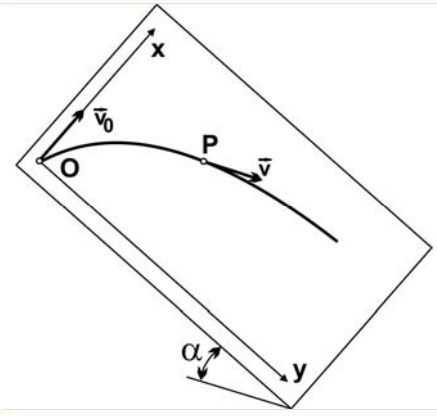


Fig. 3.1.13

3.1.13. Un punct material de masă m este aruncat pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de planul orizontal cu viteza iniţială orizontală de valoare v_0 .

a) Să se scrie ecuaţiile diferenţiale ale mişcării punctului material pe planul înclinat în coordonate carteziene, faţă de sistemul de referinţă din fig. 3.1.13, ţinând seama de frecarea de alunecare dintre el şi legătură, caracterizată prin coeficientul de frecare μ cunoscut.

b) Pentru $\mu = 0$ să se determine legea de mişcare a punctului material, ecuaţia traiectoriei şi legea de variaţie a vitezei sale în coordonate carteziene.

c) Pentru $\mu = \mathrm{tg}\alpha$ să se arate că traiectoria punctului material admite o asimptotă paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat şi să se determine ecuaţia asimptotei şi viteza punctului material pe ramura asimptotică a traiectoriei sale.

Răspunsuri

a) $\ddot{x} + \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\mu g\cos\alpha = 0$, $\ddot{y} + \dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\mu g\cos\alpha = g\sin\alpha$.

b) $x = v_0 t$, $y = \dfrac{gt^2}{2}\sin\alpha$;

$y = \dfrac{gx^2}{2v_0^2}\sin\alpha$; $v_x = v_0$, $v_y = gt\sin\alpha$.

c) $x_a = \dfrac{2v_0^2}{3g\sin\alpha}$, $v_a = \dfrac{v_0}{2}$.

3.1.14. Un punct material de masă m este lansat cu viteza iniţială orizontală de valoare v_0 din poziţia A corespunzătoare punctului cel mai înalt al suprafeţei exterioare a unei sfere fixe cu centrul O şi de rază R, aşezată pe un plan orizontal ca în fig. 3.1.14, unde grosimea suportului în punctul cel mai de jos al sferei este neglijabilă.

a) Să se determine valoarea v_0 astfel încât punctul material să părăsească legătura într-o poziţie B pe sferă, dată prin unghiul la centru α faţă de verticală, măsurat în planul vertical al mişcării.

b) Pentru valoarea v_0 determinată, să se calculeze valoarea vitezei finale a punctului material, în momentul în care ajunge pe planul orizontal. Frecarea de alunecare dintre punctul material şi sferă, precum şi rezistenţa aerului, se consideră neglijabile.

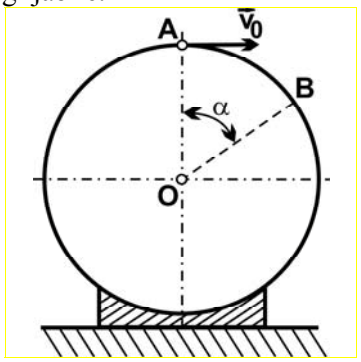


Fig. 3.1.14

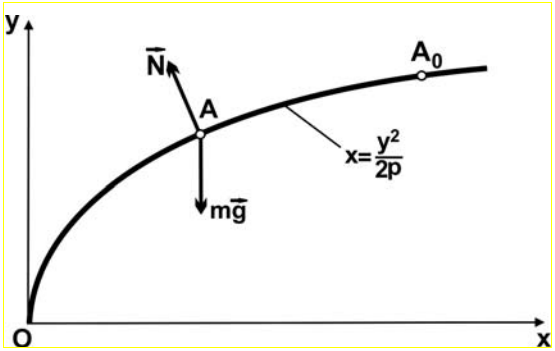


Fig. 3.1.15

Răspunsuri

a) $v_0 = \sqrt{gR(3\cos\alpha - 2)}$.

b) $v_f = \sqrt{gR(3\cos\alpha + 2)}$.

3.1.15. Un punct material de masă m este lăsat liber din poziția $A_0(2p, 2p, 0)$ pe suprafața unui cilindru parabolic cu generatoarea orizontală, care are ecuația $y^2 = 2px$ față de sistemul de referință Oxyz cu axa Oy verticală orientată în sens pozitiv ascendent ca în fig. 3.1.15. Neglijând frecarea de alunecare a punctului material pe legătură, să se determine poziția B în care acesta părăseşte legătura.

Răspuns

$B(p/2, p, 0)$.

3.1.16. Un inel de masă m se poate mişca fără frecare pe parabola din sârmă de ecuații $x = 0$ şi $y^2 = 2pz$ față de sistemul de referință Oxyz cu axa Oz verticală, având sensul pozitiv ascendent. Pe lângă greutatea proprie, asupra inelului mai acționează o forță $\vec{F}$, ale cărei proiecții pe axele de coordonate sunt:

$$X = 2k\left(x + \frac{yz}{p}\right), \quad Y = 2k\left(y + \frac{xz}{p}\right), \quad Z = 2k\left(z + \frac{xy}{p}\right),$$

unde k este o constantă pozitivă cunoscută.

a) Să se arate că forța $\vec{F}$ este conservativă şi să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forțele ce acționează asupra inelului în deplasarea sa pe parabolă din O în poziția $A(0, 2p, 2p)$.

b) Dacă inelul este lansat din O cu viteza inițială de valoare v_0, să se determine v_0 şi m astfel încât acesta să ajungă în A cu viteza şi accelerația nule.

c) În condițiile de la punctul b), să se determine reacțiunea parabolei asupra inelului, când acesta ajunge în poziția A.

Răspunsuri

a) $L_{OA} = 8kp^2 - 2mgp$.

b) $v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{3gp}$, $m = \frac{6kp}{g}$.

c) $\vec{N}_A = 2kp\left(-4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right)$.

3.1.17. Un inel de masă m se poate mişca fără frecare pe elipsa din sârmă de ecuație $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ față de planul vertical Oxy cu axa Oy verticală, având sensul pozitiv ascendent.

a) Să se determine lucrul mecanic al greutății inelului în deplasarea sa din poziția $A(a, 0)$ în poziția $B(0, b)$.

b) Dacă inelul este lansat din A cu viteza inițială de valoare v_0, să se determine v_0 şi m astfel încât acesta să ajungă în B cu viteza nulă.

c) În condițiile de la punctul b) şi pentru $a = b = R$, să se exprime valoarea reacțiunii legăturii asupra inelului în funcție de ordonata sa y, în timpul mişcării sale din A în B.

Răspunsuri

a) $L_{AB} = -mgb$.

b) $v_0 = \sqrt{2gb}$.

c) $N = \frac{mg}{R}(3y - 2b)$.

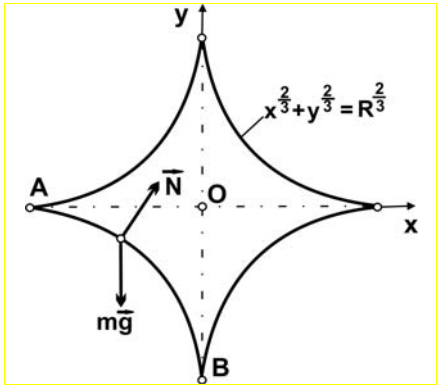


Fig. 3.1.18

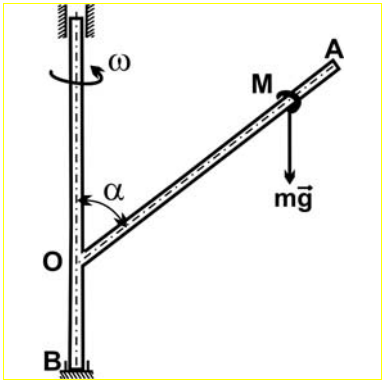


Fig. 3.1.19

3.1.18. Un inel de masă m este lăsat liber din poziția A pe astroida din sârmă reprezentată în fig. 3.1.18, care are ecuația $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$ față de planul vertical Oxy din figură, în care axa Oy este verticală. Neglijând frecarea de alunecare dintre inel şi legătură, să se determine:

a) viteza cu care ajunge în B;
b) intervalul de timp al mişcării sale din A în B.

Răspunsuri

a) $v_B = \sqrt{2gR}$;

b) $t_{AB} = 6\sqrt{\dfrac{R}{2g}}$.

3.1.19. În fig. 3.1.19 este reprezentat un corp rigid executat din sârmă de oțel, care are o mişcare de rotație uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe fixe verticale, față de care latura sa OA formează unghiul α dat. Pe această latură se mişcă fără frecare inelul M de masă m, care se află inițial în poziția sa de repaus relativ, din care este lansat cu viteza inițială relativă v_0 spre A. Să se determine legea mişcării relative a inelului şi reacțiunea legăturii asupra sa în timpul mişcării sale relative.

Răspunsuri

$$x = OM = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} + \frac{v_0}{\omega\sin\alpha}\,\mathrm{sh}(\omega t \sin\alpha)\ ;$$

$$N_y = \frac{mg}{\sin\alpha} + m\omega v_0 \cos\alpha\,\mathrm{sh}(\omega t\sin\alpha)\ ,$$

$$N_z = 2m\omega v_0 \sin\alpha\ \mathrm{ch}(\omega t\sin\alpha)\ .$$

3.1.20. Discul circular cu centrul O_1 şi de rază R se roteşte uniform în planul său orizontal în jurul articulației din O_1 cu viteza unghiulară ω . La distanța h de O_1 este practicat un canal rectiliniu, în care se mişcă fără frecare culisorul A de masă m, legat de marginile canalului prin arcuri elicoidale de constantă elastică echivalentă k, ca în fig. 3.1.20. La momentul inițial al mişcării relative, culisorul se află la mijlocul O

al canalului, în poziția în care arcurile sunt nedeformate, unde i se imprimă viteza inițială relativă v_0.

a) Dacă $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, care va fi poziția de repaus relativ a culisorului? Dar dacă $\omega \neq \omega_0$?

b) Pentru $\omega < \omega_0$ să se determine legea mişcării relative a culisorului şi componentele reacțiunii canalului asupra sa în timpul mişcării sale relative.

Răspunsuri

a) $\omega = \omega_0$, $x_r = \forall\, x \in (-\sqrt{R^2 - h^2}, \sqrt{R^2 - h^2})$;

$\omega \neq \omega_0$, $x_r = 0$;

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

b) $$x = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\right) ;$$

$$N_y = 2m\omega v_0 \cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - m\omega^2 h \ , \quad N_z = mg \ .$$

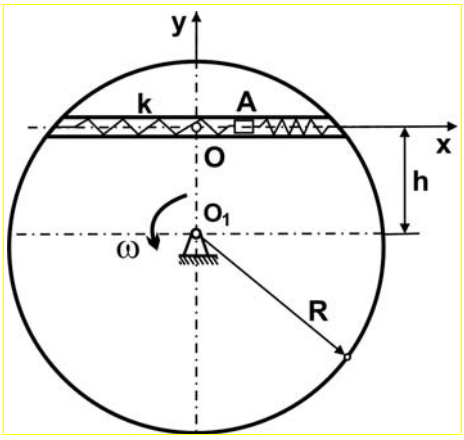


Fig. 3.1.20

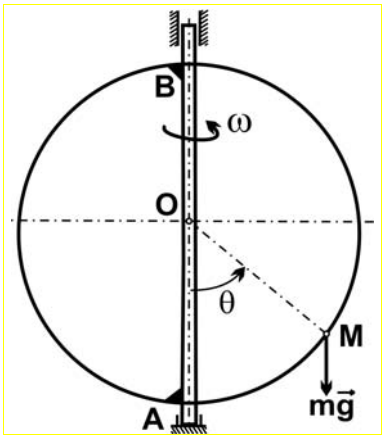


Fig. 3.1.21

3.1.21. Circumferința din sârmă cu centrul O şi de rază R se roteşte în jurul diametrului său vertical cu viteza unghiulară ω constantă. Pe circumferință se poate

mişca fără frecare un inel M de masă m, pentru care se consideră ca parametru de poziție al mişcării sale relative unghiul θ dintre raza mobilă OM şi raza verticală OA, aşa cum este reprezentat în fig. 3.1.21.

a) Să se determine toate pozițiile de repaus relativ ale inelului pe circumferință şi valorile corespunzătoare ale reacțiunii legăturii asupra sa.

b) Să se studieze stabilitatea pozițiilor de repaus relativ determinate, exprimând legea de mişcare a inelului în cazul micilor oscilații în jurul acestor poziții de repaus relativ.

Răspunsuri

a) $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_{3,4} = \pm\arccos\dfrac{g}{R\omega^2}$; $N_{1,2} = mg$, $N_{3,4} = mR\omega^2$.

3.1.22. Parabola din sârmă de ecuație $y = x^2/2p$ față de sistemul de referință din fig. 3.1.22 se roteşte în jurul axei sale de simetrie verticale Oy cu viteza unghiulară ω constantă. Pe parabolă se mişcă fără frecare inelul A de masă m, care este lansat din vârful O al parabolei cu viteza inițială relativă v_0. Să se determine:

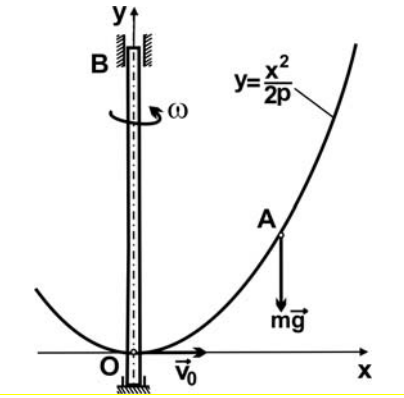


Fig. 3.1.22

a) poziția de repaus relativ şi reacțiunea legăturii asupra inelului în poziția sa de repaus relativ, dacă $\omega = \omega_0 = \sqrt{g/p}$;

b) poziția de repaus relativ şi reacțiunea legăturii asupra inelului în poziția sa de repaus relativ, dacă $\omega \neq \omega_0$;

c) expresia vitezei relative a inelului în funcție de poziția sa pe parabolă în timpul mişcării sale relative, dacă $\omega \neq \omega_0$.

Răspunsuri

a) $\forall\, x, y \in R$, $y = \dfrac{x^2}{2p}$, $N_1 = \dfrac{mg}{p}\sqrt{x^2 + p^2}$;

b) $x = y = 0$, $N_2 = mg$;

c) $v_r = \sqrt{v_0^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)x^2} = \sqrt{v_0^2 + 2p\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)y}$.

3.2. Momente de inerţie

3.2.1 – 11. Să se determine momentele de inerţie axiale, polare şi centrifugale pentru corpurile omogene de masă m, având forma şi dimensiunile geometrice din fig. 3.2.1 – 11, în raport cu sistemele de referinţă din fiecare figură, unde cu C s-a notat centrul de greutate al corpului şi cu indicele zero sunt notate axele principale de inerţie corespunzătoare originii sistemului de referinţă considerat.

Rezolvare

În cele ce urmează se prezintă două metode pentru rezolvarea completă a problemei 3.2.11, la celelalte probleme dându-se numai răspunsurile la întrebările din enunţ. În fig. 3.2.11 nu s-au mai reprezentat sistemele de referinţă $Ox_0y_0z_0$ şi $Cx'_0y'_0z'_0$, pentru a nu se complica figura, iar suprafaţa de secţiune a corpului cu planul său de simetrie Oyz a fost haşurată.

Metoda I. Calculul momentelor de inerţie axiale şi centrifugale în raport cu sistemul de referinţă Oxyz se poate face pe baza descompunerii corpului considerat în corpuri la care se cunosc formule de calcul ale momentelor de inerţie în raport cu axe paralele, cu originea în centrul de greutate al fiecărui corp parţial rezultat în urma descompunerii. Corpul din fig. 3.2.11 se poate descompune în două paralelipipede dreptunghice cu centrele de greutate C_1 şi C_2, precum şi în cubul cu centrul O, considerat ca cea de-a treia parte a corpului dat iniţial. Deoarece densitatea acestui corp este:

$$\rho = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \frac{m_3}{V_3} = \frac{m}{V} = \frac{m_1}{8a^3} = \frac{m_2}{4a^3} = \frac{m_3}{8a^3} = \frac{m}{20a^3} \ ,$$

se obţine:

$$m_1 = m_3 = \frac{2m}{5} \ , \qquad m_2 = \frac{m}{5} \ ,$$

astfel încât momentele de inerţie axiale ale celor 3 părţi faţă de sistemele de referinţă din figură rezultă:

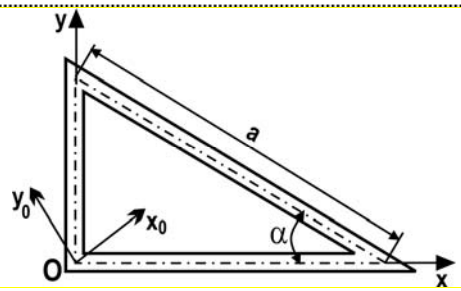


Fig. 3.2.1

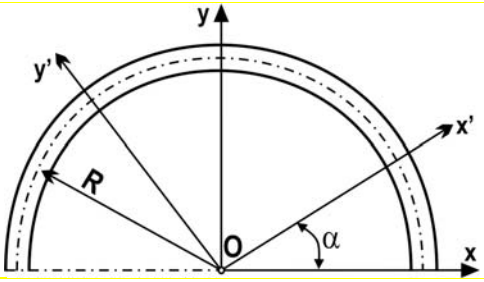


Fig. 3.2.2

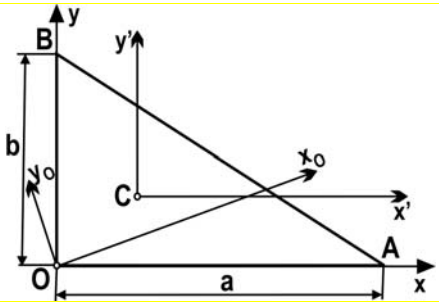


Fig. 3.2.3

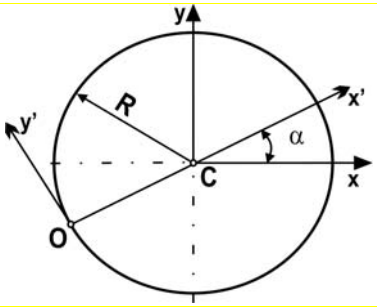


Fig. 3.2.4

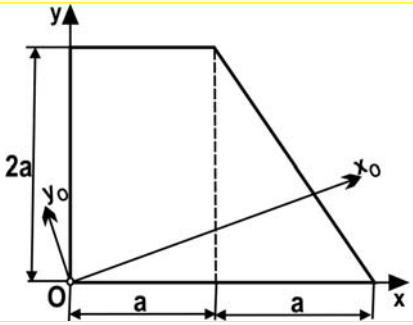


Fig. 3.2.5

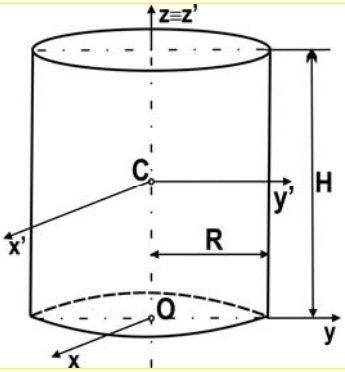


Fig. 3.2.6

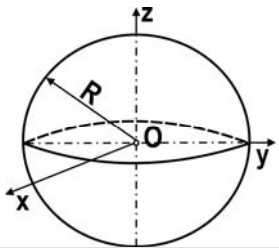


Fig. 3.2.7

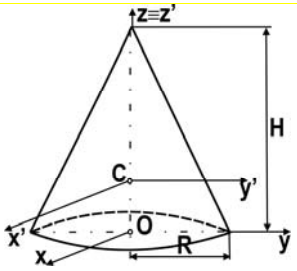


Fig. 3.2.8

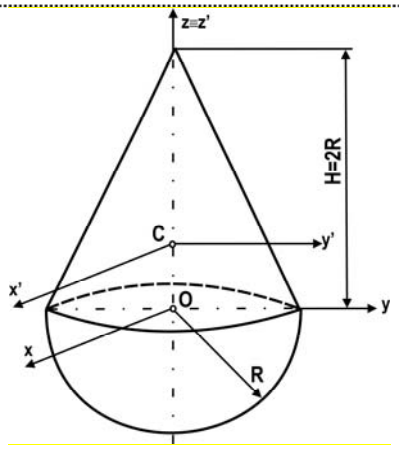


Fig. 3.2.9

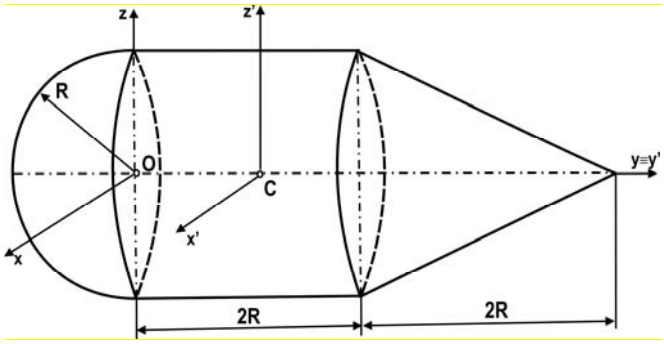


Fig. 3.2.10

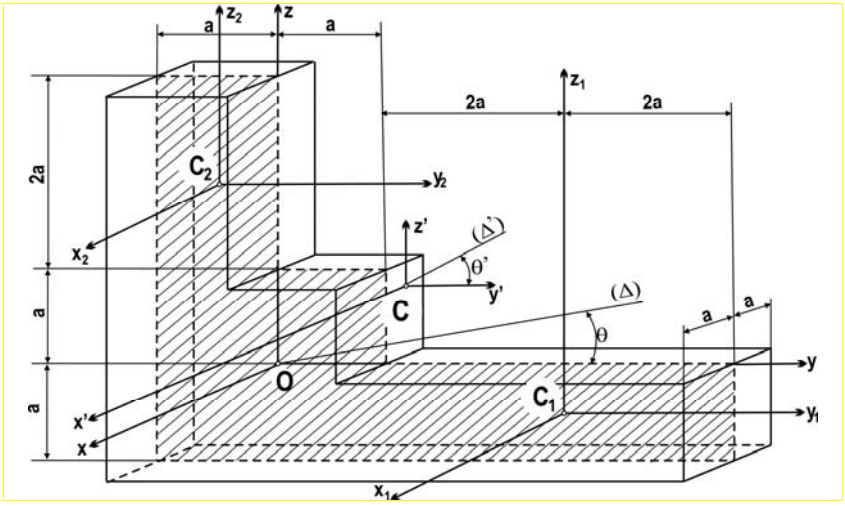


Fig. 3.2.11

$$J_{x_1}^{(1)} = \frac{m_1}{12}\left(16a^2 + a^2\right) = \frac{17}{30}ma^2 \ , \qquad J_{y_1}^{(1)} = \frac{m_1}{12}\left(4a^2 + a^2\right) = \frac{ma^2}{6} \ ,$$

$$J_{z_1}^{(1)} = \frac{m_1}{12}\left(4a^2 + 16a^2\right) = \frac{2}{3}ma^2 \ ; \qquad J_{x_2}^{(2)} = \frac{m_2}{12}\left(a^2 + 4a^2\right) = \frac{ma^2}{12} \ ,$$

$$J_{y_2}^{(2)} = \frac{m_2}{12}\left(4a^2 + 4a^2\right) = \frac{2}{15}ma^2 \ , \qquad J_{z_2}^{(2)} = \frac{m_2}{12}\left(4a^2 + a^2\right) = \frac{ma^2}{12} \ ;$$

$$J_x^{(3)} = J_y^{(3)} = J_z^{(3)} = \frac{m_3}{12}\left(4a^2 + 4a^2\right) = \frac{4}{15}ma^2 \ ,$$

iar toate momentele de inerție centrifugale sunt nule, axele de coordonate fiind axe de simetrie pentru fiecare corp parțial. Cu ajutorul formulelor lui Steiner, pentru întregul corp rezultă:

$$J_x = J_{x_1}^{(1)} + m_1\left(9a^2 + \frac{a^2}{4}\right) + J_{x_2}^{(2)} + m_2\left(4a^2 + \frac{a^2}{4}\right) + J_x^{(3)} = \frac{82}{15}ma^2 \ ,$$

$$J_y = J_{y_1}^{(1)} + m_1\left(\frac{a}{2}\right)^2 + J_{y_2}^{(2)} + m_2\left(2a\right)^2 + J_y^{(3)} = \frac{22}{15}ma^2 \ ,$$

$$J_z = J_{z_1}^{(1)} + m_1\left(3a\right)^2 + J_{z_2}^{(2)} + m_2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + J_z^{(3)} = \frac{14}{3}ma^2 \ ,$$

$$J_O = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right) = \frac{29}{5}ma^2 \ ,$$

$$J_{xy} = J_{zx} = 0 \ ,$$

$$J_{yz} = m_1\left(3a\right)\left(-\frac{a}{2}\right) + m_2\left(2a\right)\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{4}{5}ma^2 \ .$$

Pentru determinarea axelor principale şi a momentelor principale de inerție în raport cu punctul O este necesar să se caute axele respective din planul Oyz, deoarece se observă că axa Ox este principală de inerție. Pentru aceasta, se consideră axa (Δ) ce trece prin O, variabilă în acest plan, față de care momentul de inerție al corpului va fi:

$$J_\Delta = J_y\cos^2\theta + J_z\sin^2\theta - 2J_{yz}\sin\theta\cos\theta = \frac{2ma^2}{15}\left(23 - 12\cos 2\theta + 6\sin 2\theta\right) \ .$$

Din condiția de extrem a acestui moment de inerție rezultă:

$$\mathrm{tg}2\theta = -\frac{1}{2} \ , \qquad \theta_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2} = -13°17' \ , \qquad \theta_2 = \theta_1 + 90° = 76°43' \ ,$$

de unde se obțin momentele principale de inerție în raport cu punctul O:

$$J_1 = J_x = 5{,}47ma^2 \ , \qquad J_2 = J_\Delta\left(\theta_1\right) = 1{,}278ma^2 \ , \qquad J_3 = J_\Delta\left(\theta_2\right) = 4{,}855ma^2 \ .$$

Centrul de greutate al corpului se va găsi în planul său de simetrie Oyz, deci coordonatele sale vor fi:

$$x_C = 0 \ , \qquad y_C = \frac{m_1 y_{C_1} + m_2 y_{C_2}}{m} = \frac{11}{10}a \ , \qquad z_C = \frac{m_1 z_{C_1} + m_2 z_{C_2}}{m} = \frac{a}{5} \ .$$

Pe baza formulelor lui Steiner rezultă:

$$J_{x'} = J_x - m\left(\frac{121}{100}a^2 + \frac{a^2}{25}\right) = \frac{253}{60}ma^2 \ ,$$

$$J_{y'} = J_y - m\left(\frac{a}{5}\right)^2 = \frac{107}{75}ma^2 \ ,$$

$$J_{z'} = J_z - m\left(\frac{11a}{10}\right)^2 = \frac{1037}{300}ma^2 \ ,$$

$$J_C = J_O - m\left(\frac{121}{100}a^2 + \frac{a^2}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}\right) = \frac{91}{20}ma^2 \ ,$$

$$J_{x'y'} = J_{z'x'} = 0 \ ,$$

$$J_{y'z'} = J_{yz} - my_C z_C = -\frac{51}{50}ma^2 \ .$$

Axele şi momentele principale centrale de inerţie ale corpului se determină în mod analog, astfel încât, pe baza valorilor calculate mai sus şi cu notaţiile din fig. 3.2.11, rezultă:

$$J_{\Delta'} = J_{y'}\cos^2\theta' + J_{z'}\sin^2\theta' - 2J_{y'z'}\sin\theta'\cos\theta' =$$

$$= \frac{ma^2}{600}\left(1465 - 609\cos 2\theta' + 612\sin 2\theta'\right) \ ,$$

$$\operatorname{tg}2\theta' = -\frac{204}{203} \cong -1 \ , \quad \theta'_1 = -22{,}5° \ , \quad \theta'_2 = 67{,}5° \ ,$$

$$J_{1'} = J_{x'} = 4{,}217ma^2 \ , \quad J_{2'} = J_{\Delta'}\left(\theta'_1\right) = 1{,}72ma^2 \ , \quad J_{3'} = J_{\Delta'}\left(\theta'_2\right) = 3{,}16ma^2 \ .$$

Metoda II. Metoda cea mai generală pentru calculul momentelor de inerţie axiale şi centrifugale ale unui corp în raport cu un sistem de referinţă Oxyz este cu ajutorul integralelor de volum pe domeniul volumetric ocupat de corp, deoarece nu întotdeauna se poate efectua o descompunere convenabilă a corpului în părţi, astfel încât pentru fiecare parte să se poată determina uşor momentele de inerţie în raport cu axele paralele ce trec prin centrul de greutate al părţii respective. Pentru corpul din fig. 3.2.11, gradul de dificultate pentru efectuarea acestor calcule prin această metodă generală este acelaşi ca şi prin metoda precedentă, deoarece integralele de volum corespunzătoare se pot efectua relativ uşor, după cum urmează:

$$J_x=\rho\iiint\left(y^2+z^2\right)dxdydz=\rho\iint\left(y^2+z^2\right)dydz\int_{-a}^{a}dx=\frac{m}{10a^2}\left(\int_{-a}^{3a}\left(\frac{a^3}{3}+az^2\right)dz+\right.$$
$$\left.+\int_{-a}^{a}\left(\frac{a^3}{3}+az^2\right)dz+\int_{-a}^{0}\left(\frac{125a^3}{3}-\frac{a^3}{3}+4az^2\right)dz\right)=\frac{82}{15}ma^2\ ,$$

$$J_y=\rho\iiint\left(x^2+z^2\right)dxdydz=\rho\iint\left(\frac{2a^3}{3}+2az^2\right)dydz=\frac{m}{10a^2}\left(\int_{-a}^{3a}\left(\frac{a^2}{3}+z^2\right)adz+\right.$$
$$\left.+\int_{-a}^{a}\left(\frac{a^2}{3}+z^2\right)adz+\int_{-a}^{0}\left(\frac{a^2}{3}+z^2\right)4adz\right)=\frac{22}{15}ma^2\ ,$$

$$J_z=\rho\iiint\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\rho\iint\left(\frac{2a^3}{3}+2ay^2\right)dydz=\frac{m}{10a^2}\left(\int_{-a}^{3a}\frac{2a^3}{3}dz+\right.$$
$$\left.+\int_{-a}^{a}\frac{2a^3}{3}dz+\int_{-a}^{0}\left(\frac{a^2}{3}4a+\frac{125a^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right)dz\right)=\frac{14}{3}ma^2\ ,$$

$$J_{xy}=\rho\iiint xydxdydz=\rho\iint ydydz\int_{-a}^{a}xdx=0\ ,$$

$$J_{yz}=\rho\iiint yzdxdydz=\rho\iint yzdydz\int_{-a}^{a}dx=\frac{m}{10a^2}\left(\int_{-a}^{3a}\left(-\frac{a^2}{2}\right)zdz+\int_{-a}^{a}\frac{a^2}{2}zdz+\right.$$
$$\left.+\int_{-a}^{0}\left(\frac{25a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)zdz\right)=-\frac{4}{5}ma^2\ ,$$

$$J_{zx}=\rho\iiint xzdxdydz=\rho\iint zdydz\int_{-a}^{a}xdx=0\ ,$$

unde s-au efectuat mai întâi integralele în raport cu x şi apoi cele în raport cu y, care s-au descompus pe intervalele $[-a,0]$, $[0,a]$, respectiv $[a,5a]$. Se observă că se obțin aceleaşi rezultate, iar, mai departe, calculele pentru determinarea celorlalte momente de inerție cerute în enunț se efectuează la fel ca în prima metodă.

Răspunsuri

3.2.1. $J_x=J\sin^2\alpha\left(1+\sin\alpha\right)$, $J_y=J\cos^2\alpha\left(1+\cos\alpha\right)$,
$J_z=J_O=J_x+J_y=J\left(1+\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\right)$,

$$J_{xy} = \frac{1}{2} J \sin\alpha\cos\alpha \ , \quad J_{yz} = J_{zx} = 0 \ , \quad J = \frac{ma^2}{3\left(1+\sin\alpha+\cos\alpha\right)} \ ;$$

$$J_{1,2} = \frac{1}{2}\left(J_z \mp \sqrt{\left(J_y - J_x\right)^2 + 4J_{xy}^2} \right) \ , \quad J_3 = J_z \ .$$

3.2.2. $J_x = J_y = J_{x'} = J_{y'} = \dfrac{mR^2}{2}$, $J_z = J_O = J_x + J_y = J_{x'} + J_{y'} = mR^2$,

$J_{xy} = J_{x'y'} = 0$, $J_{yz} = J_{zx} = 0$.

3.2.3. $J_x = \dfrac{mb^2}{6}$, $J_y = \dfrac{ma^2}{6}$, $J_z = J_O = \dfrac{m}{6}\left(a^2 + b^2\right)$,

$J_{xy} = \dfrac{mab}{12}$, $J_{yz} = J_{zx} = 0$;

$J_{1,2} = \dfrac{m}{12}\left(a^2 + b^2 \mp \sqrt{\left(a^2 - b^2\right)^2 + a^2 b^2} \right)$, $J_3 = J_z$;

$J_{x'} = \dfrac{mb^2}{18}$, $J_{y'} = \dfrac{ma^2}{18}$, $J_{z'} = J_C = \dfrac{m}{18}\left(a^2 + b^2\right)$,

$J_{x'y'} = -\dfrac{mab}{36}$, $J_{y'z'} = J_{z'x'} = 0$.

3.2.4. $J_x = J_y = J_{x'} = \dfrac{mR^2}{4}$, $J_z = J_C = \dfrac{mR^2}{2}$,

$J_{y'} = \dfrac{5mR^2}{4}$, $J_{z'} = J_O = \dfrac{3mR^2}{2}$,

$J_{xy} = J_{x'y'} = 0$.

3.2.5. $J_x = \dfrac{10ma^2}{9}$, $J_y = \dfrac{5ma^2}{6}$, $J_z = J_O = \dfrac{35ma^2}{18}$,

$J_{xy} = \dfrac{11ma^2}{18}$;

$J_1 = 0{,}345ma^2$, $J_2 = 1{,}6ma^2$, $J_3 = J_z = 1{,}944ma^2$.

3.2.6. $J_x = J_y = J_1 = J_2 = m\left(\dfrac{H^2}{3} + \dfrac{R^2}{4}\right)$, $J_z = J_3 = J_{z'} = J_{3'} = \dfrac{mR^2}{2}$,

$J_O = m\left(\dfrac{H^2}{3} + \dfrac{R^2}{2}\right)$,

$$J_{x'} = J_{y'} = J_{1'} = J_{2'} = \frac{m}{4}\left(\frac{H^2}{3} + R^2\right) ,$$

$$J_C = \frac{m}{2}\left(\frac{H^2}{6} + R^2\right) .$$

3.2.7. $J_x = J_y = J_z = J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2mR^2}{5}$,

$$J_O = \frac{3mR^2}{5} .$$

3.2.8. $J_x = J_y = J_1 = J_2 = \frac{m}{10}\left(H^2 + \frac{3}{2}R^2\right)$, $J_z = J_3 = J_{z'} = J_{3'} = \frac{3mR^2}{10}$,

$$J_O = \frac{m}{10}\left(H^2 + 3R^2\right) ,$$

$$J_{x'} = J_{y'} = J_{1'} = J_{2'} = \frac{3m}{80}\left(H^2 + 4R^2\right) ,$$

$$J_C = \frac{3m}{80}\left(H^2 + 8R^2\right) .$$

3.2.9. $J_x = J_y = J_1 = J_2 = \frac{19}{40}mR^2$, $J_z = J_3 = J_{z'} = J_{3'} = \frac{7}{20}mR^2$,

$$J_O = \frac{13}{20}mR^2 ,$$

$$J_{x'} = J_{y'} = J_{1'} = J_{2'} = \frac{603}{1280}mR^2 ,$$

$$J_C = \frac{827}{1280}mR^2 .$$

3.2.10. $J_x = J_z = J_1 = J_3 = \frac{117}{50}mR^2$, $J_y = J_2 = J_{y'} = J_{2'} = \frac{11}{25}mR^2$,

$$J_O = \frac{64}{25}mR^2 ,$$

$$J_{x'} = J_{z'} = J_{1'} = J_{3'} = \frac{2063}{1600}mR^2 ,$$

$$J_C = \frac{483}{320}mR^2 .$$

3.3. Dinamica sistemelor materiale

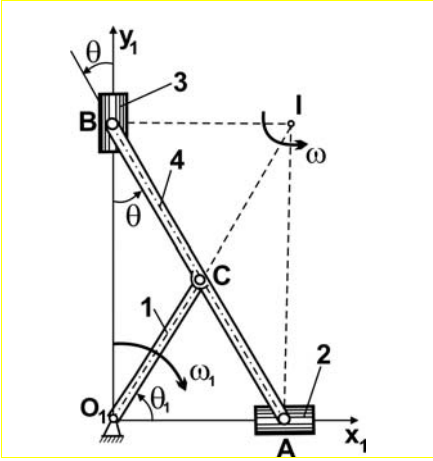


Fig. 3.3.1

3.3.1. Sistemul de patru corpuri omogene din fig. 3.3.1, care se mişcă fără frecare în planul vertical $O_1x_1y_1$ cu axa O_1y_1 verticală, având sensul pozitiv ascendent, este format din manivela 1 de lungime ℓ şi masă $m_1 = 3m$, din bara 4 de lungime 2ℓ şi masă $m_4 = 6m$, articulată la mijlocul său C de capătul corespunzător al manivelei, precum şi din culisoarele 2 şi 3 de mase $m_2 = m_3 = m$, care se mişcă pe axele de coordonate şi sunt articulate la capetele A şi B ale barei. Ştiind că sistemul este lăsat liber din poziția sa inițială în care unghiul θ dintre bară şi axa O_1y_1 are valoarea θ_0 mică, să se exprime viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară a barei în funcție de parametrul de poziție θ al sistemului considerat.

Rezolvare

Deoarece frecările sunt neglijabile, toate legăturile sunt ideale şi asupra sistemului acționează numai greutățile corpurilor sale ca forțe direct aplicate, care sunt forțe conservative, deci sunt îndeplinite condițiile pentru aplicarea teoremei conservării energiei mecanice pentru sisteme materiale. Pentru calculul energiei cinetice E_{cII} a sistemului la un moment oarecare t al mişcării sale, este necesar să se exprime vitezele unghiulare ale corpurilor 1 şi 4 şi vitezele culisoarelor la momentul t în funcție de parametrul de poziție θ al sistemului. Din fig. 3.3.1, în care s-a notat cu I centrul instantaneu al barei şi cu ω viteza sa unghiulară, rezultă imediat:

$$\omega = \dot{\theta}\ , \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta\ , \quad \omega_1 = \dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}\ ,$$

$$v_2 = \omega IA = 2\ell\dot{\theta}\cos\theta\ , \quad v_3 = \omega IB = 2\ell\dot{\theta}\sin\theta\ , \quad v_C = \omega IC = \ell\dot{\theta}\ ,$$

astfel încât se obține:

$$E_{cII} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}m_4v_C^2 + \frac{1}{2}J_4\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{3m\ell^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{m}{2}4\ell^2\dot\theta^2\cos^2\theta + \frac{m}{2}4\ell^2\dot\theta^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}6m\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{6m\cdot 4\ell^2}{12}\dot\theta^2 =$$

$$= \frac{13}{2}m\ell^2\dot\theta^2.$$

Pentru calculul energiei potențiale E_{pII} a sistemului în poziția sa de la momentul t, determinată de unghiul θ, se consideră poziția sa de referință, pentru care energia potențială este nulă, poziția în care θ are valoarea $\pi/2$, deci $\theta_1 = 0$. Deoarece culisorul 2 se mişcă pe axa orizontală O_1x_1, energia potențială a sistemului va fi dată numai de greutățile corpurilor 1, 3 şi 4, astfel încât se obține:

$$E_{pII} = m_1g\frac{\ell}{2}\cos\theta + m_3g\cdot 2\ell\cos\theta + m_4g\ell\cos\theta = \frac{19}{2}mg\ell\cos\theta\ .$$

Pentru momentul inițial $t_0 = 0$, când θ are valoarea θ_0 dată şi $\dot\theta_1 = 0$, rezultă:

$$E_{cI} = 0\ ,\quad E_{pI} = \frac{19}{2}mg\ell\cos\theta_0\ .$$

Aplicând teorema conservării energiei mecanice:

$$E_{cII} + E_{pII} = E_{cI} + E_{pI}\ ,$$

se determină viteza unghiulară a barei:

$$\omega = \dot\theta = \sqrt{\frac{19g}{13\ell}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}\ ,$$

după care, prin derivare în raport cu timpul, se obține şi accelerația sa unghiulară:

$$\varepsilon = \ddot\theta = \sqrt{\frac{19g}{13\ell}}\frac{\dot\theta\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = \frac{19g}{26\ell}\sin\theta\ ,$$

care se exprimă în funcție de parametrul de poziție θ, aşa cum se cere în enunț.

3.3.2. Bara omogenă AOB de greutate 6G şi lungime 2ℓ, îndoită în unghi drept la mijlocul său O, se poate roti fără frecare în jurul laturii sale verticale OB, care este fixată în această poziție prin intermediul lagărelor din B şi D, ca în fig. 3.3.2. Pe latura sa OA se poate mişca fără frecare un culisor P de greutate G. La momentul inițial al mişcării, când culisorul este legat printr-un fir scurt la o distanță foarte mică de O, se imprimă sistemului viteza unghiulară ω_0 şi se taie firul.

a) Să se exprime viteza unghiulară şi accelerația unghiulară a barei ca funcții de poziția culisorului pe latura OA şi de viteza sa relativă.

b) Să se determine viteza şi acceleraţia absolută a culisorului la momentul în care ajunge la capătul A al barei.

c) Să se afle variaţia în funcţie de poziţia culisorului pe latura OA a momentului unui cuplu exterior de forţe, care trebuie aplicat barei, astfel încât viteza sa unghiulară să fie menţinută constantă în timpul mişcării relative a culisorului.

Rezolvare

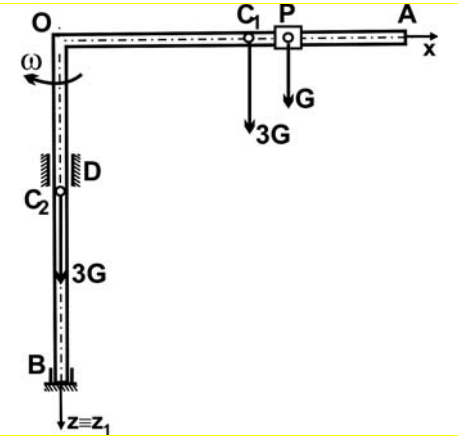


Fig. 3.3.2

a) În fig. 3.3.2 s-au reprezentat forţele exterioare direct aplicate ce acţionează asupra sistemului, care sunt greutăţile corpurilor sale, precum şi sistemul de referinţă Oxyz legat de bară, care are o mişcare de rotaţie în jurul axei fixe Oz_1. Se observă că nici aceste forţe şi nici reacţiunile din lagăre nu dau momente faţă de această axă fixă verticală, astfel încât se poate aplica teorema de conservare parţială a momentului cinetic total al sistemului în raport cu o axă fixă:

$$\frac{3G}{g}\frac{\ell^2}{3}\omega + x\left(\frac{G}{g}\omega x\right) = \frac{3G}{g}\frac{\ell^2}{3}\omega_0 \ ,$$

de unde rezultă:

$$\omega = \frac{\ell^2\omega_0}{\ell^2 + x^2} \ , \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = -\frac{2\ell^2\omega_0 x\dot{x}}{\left(\ell^2 + x^2\right)^2} \ ,$$

în care x este parametrul de poziţie al mişcării relative a culisorului, iar $\dot{x}$ reprezintă viteza sa relativă.

b) Proiecţia pe axa Ox a ecuaţiei diferenţiale a mişcării relative a culisorului conduce la ecuaţiile:

$$\frac{G}{g}\ddot{x} = \frac{G}{g}\omega^2 x \ , \qquad \ddot{x} = \frac{\ell^4\omega_0^2 x}{\left(\ell^2 + x^2\right)^2} \ .$$

Din ultima ecuaţie se poate determina o integrală primă pe baza substituţiei:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) \ ,$$

astfel încât, după separarea variabilelor, rezultă:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{\ell^4\omega_0^2}{2\left(\ell^2+x^2\right)} + \frac{\ell^2\omega_0^2}{2} \ , \qquad \dot{x} = \frac{\ell\omega_0 x}{\sqrt{\ell^2+x^2}} \ .$$

Pentru $x = \ell$ se obține:

$$\vec{v}_r = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\omega_0\,\vec{i} \ , \qquad \vec{\omega} = \frac{\omega_0}{2}\vec{k} \ ,$$

$$\vec{v}_t = \vec{\omega}\times\overline{OA} = \frac{\ell\omega_0}{2}\vec{j} \ , \qquad \vec{v}_a = \frac{\ell\omega_0}{2}\left(\sqrt{2}\,\vec{i}+\vec{j}\right) ;$$

$$\vec{a}_r = \frac{\ell\omega_0^2}{4}\vec{i} \ , \qquad \vec{\varepsilon} = -\frac{\omega_0}{2\ell}\frac{\sqrt{2}\ell\omega_0}{2}\vec{k} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\omega_0^2\vec{k} \ ,$$

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon}\times\overline{OA} - \omega^2\overline{OA} = -\frac{\ell\omega_0^2}{4}\left(\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{j}\right),$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\omega_0^2\vec{j} \ ,$$

$$\vec{a}_a = \frac{\sqrt{2}}{4}\ell\omega_0^2\vec{j} \ .$$

c) Dacă viteza unghiulară a barei este menținută la valoarea constantă ω_0 în timpul mişcării relative a culisorului, din ecuația diferențială a mişcării sale relative se obține:

$$\ddot{x} = \omega_0^2 x \ , \qquad d\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) = \omega_0^2 x\,dx \ , \qquad \dot{x} = \omega_0 x \ .$$

Ca urmare, momentul cinetic total al sistemului față de punctul fix O va avea expresia:

$$\vec{K}_O = \frac{3G}{g}\frac{\ell^2}{3}\omega_0\vec{k} + \frac{G}{g}\overrightarrow{OP}\times\left(\dot{x}\,\vec{i}+\omega_0\vec{k}\times\overrightarrow{OP}\right) = \frac{G}{g}\left(\ell^2+x^2\right)\omega_0\vec{k} \ ,$$

iar derivata sa în raport cu timpul devine:

$$\dot{\vec{K}}_O = 2\frac{G}{g}\omega_0 x\,\dot{x}\,\vec{k} = 2\frac{G}{g}\omega_0^2 x^2\vec{k} \ .$$

Pe baza teoremei momentului cinetic total pentru sisteme rezultă că, pentru a se menține constantă viteza unghiulară a barei în timpul mişcării relative a culisorului, este necesar să se aplice barei un cuplu de forțe de moment dirijat după axa fixă Oz_1 şi cu variația în funcție de x dată de:

$$M(x) = 2\frac{G}{g}\omega_0^2 x^2 \ .$$

3.3.3. Sistemul de trei corpuri omogene din fig. 3.3.3, în care sunt date greutăţile corpurilor şi razele tamburilor troliului, respectiv a discului circular 2, se mişcă într-un plan vertical, pornind din repaus, astfel încât corpurile 1 şi 2 se rostogolesc fără alunecare pe un plan orizontal, iar bara 3 de lungime $2\sqrt{10}\mathrm{R}$, articulată la un capăt în centrul C_2 la discului, alunecă cu celălalt capăt A pe acelaşi plan orizontal. Se consideră că cei doi tamburi ai troliului au aceeaşi grosime, se neglijează frecările de rostogolire şi frecarea din articulaţie şi se dau valorile pentru momentul cuplului aplicat troliului $M = 1{,}5GR$, respectiv pentru coeficientul de frecare de alunecare dintre capătul A al barei şi planul orizontal $\mu_3 = 0{,}125$.

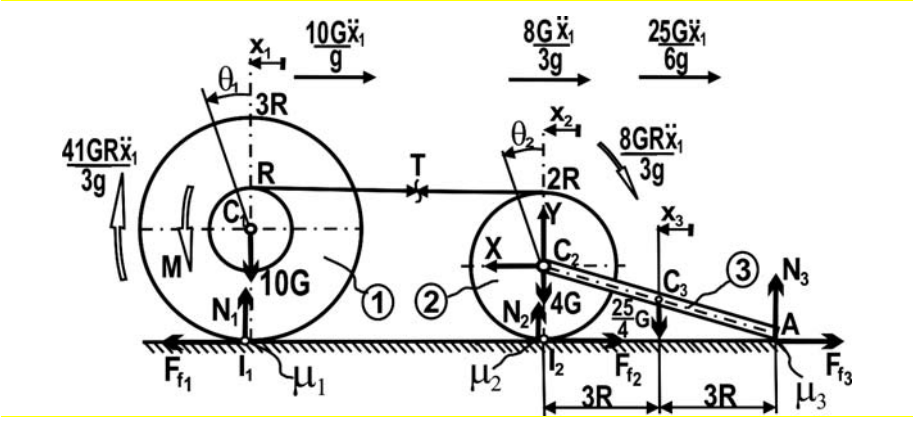


Fig. 3.3.3

Să se determine:

a) legea de mişcare a centrului C_1 al troliului;

b) reacţiunile tuturor legăturilor, exterioare şi interioare;

c) valorile minime ale coeficienţilor de frecare de alunecare μ_1 şi μ_2 dintre corpurile 1, respectiv 2, şi planul orizontal, astfel încât să fie îndeplinită condiţia de rostogolire fără alunecare a acestora.

Rezolvare

a) **Metoda I.** Metoda cea mai generală pentru rezolvarea problemelor de dinamică a sistemelor materiale este metoda separării corpurilor, asociată cu aplicarea principiului lui d′Alembert pentru fiecare corp separat. În fig. 3.3.3 s-au reprezentat forţele şi momentele exterioare şi interioare ce acţionează asupra corpurilor sistemului, precum şi rezultantele şi momentele rezultante ale forţelor de inerţie pentru fiecare corp în parte. Pentru simplificarea desenelor nu s-au mai reprezentat separat corpurile 2

şi 3, reacţiunile X şi Y din figură ale articulaţiei se consideră că sunt aplicate asupra barei, asupra discului ele vor acţiona în sensuri contrare. Sistemul având un singur grad de libertate, în primul rând este necesar să se stabilească relaţiile cinematice între parametrii de poziţie ai corpurilor, alegând ca parametru de poziţie independent deplasarea x_1 pe orizontală a centrului C_1 al troliului, măsurată de la începutul mişcării sistemului. Cu notaţiile din fig. 3.3.3 rezultă imediat:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 I_1 C_1 = 3R\dot{\theta}_1 \ , \quad 4R\dot{\theta}_1 = 4R\dot{\theta}_2 \ , \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{\theta}_2 I_2 C_2 = 2R\dot{\theta}_2 \ ;$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{x_1}{3R} \ , \quad x_2 = x_3 = \frac{2}{3}x_1 \ ,$$

unde s-a considerat că toţi parametrii de poziţie se măsoară de la începutul mişcării sistemului. Pe baza acestor relaţii cinematice se pot calcula rezultantele şi momentele rezultante în raport cu centrele de greutate ale forţelor de inerţie pentru fiecare corp din sistem şi prin aplicarea principiului lui d′Alembert se obţin ecuaţiile:

$$N_1 - 10G = 0 , \quad F_{f1} - T - 10\frac{G}{g}\ddot{x}_1 = 0 , \quad \frac{3}{2}GR - RT - 3RF_{f1} - 41\frac{GR^2}{g}\frac{\ddot{x}_1}{3R} = 0 ;$$

$$N_2 - 4G - Y = 0 , \quad T - X - F_{f2} - \frac{4G}{g}\frac{2}{3}\ddot{x}_1 = 0 , \quad 2RT + 2RF_{f2} - 8\frac{GR^2}{g}\frac{\ddot{x}_1}{3R} = 0 ;$$

$$N_3 + Y - \frac{25}{4}G = 0 , \quad X - \frac{N_3}{8} - \frac{25}{4}\frac{G}{g}\frac{2}{3}\ddot{x}_1 = 0 , \quad 3RN_3 + R\frac{N_3}{8} + RX - 3RY = 0 ,$$

unde s-a ţinut seama că forţa de frecare F_{f3} are valoarea maximă $\mu_3 N_3 = N_3/8$. Rezolvarea acestui sistem de ecuaţii se face mai uşor începând cu ultimele 3 ecuaţii, astfel încât rezultă:

$$X = \frac{G}{8}\left(3 + \frac{98}{3g}\ddot{x}_1\right) \ , \quad Y = \frac{G}{4}\left(13 + \frac{8}{3g}\ddot{x}_1\right) \ , \quad N_3 = G\left(3 - \frac{2}{3g}\ddot{x}_1\right) \ ,$$

$$N_2 = \frac{G}{4}\left(29 + \frac{8}{3g}\ddot{x}_1\right) \ , \quad T = \frac{G}{16}\left(3 + \frac{194}{3g}\ddot{x}_1\right) \ , \quad F_{f2} = -\frac{G}{16}\left(3 + \frac{130}{3g}\ddot{x}_1\right) \ ,$$

$$N_1 = 10G \ , \quad F_{f1} = \frac{G}{16}\left(3 + \frac{674}{3g}\ddot{x}_1\right) \ ,$$

$$\frac{3}{2}G - \frac{3}{16}G - \frac{97}{24}\frac{G}{g}\ddot{x}_1 - \frac{9}{16}G - \frac{337}{8}\frac{G}{g}\ddot{x}_1 - \frac{41}{3}\frac{G}{g}\ddot{x}_1 = 0 \ ,$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{9g}{718} \cong \frac{g}{80} \cong 0{,}125 \ \frac{m}{s^2} \ .$$

Ca urmare, legea de mişcare a centrului de greutate al troliului va fi:

$$x_1 = \frac{9g}{718}\frac{t^2}{2} + K_1 t + K_2 \ , \quad K_1 = K_2 = 0 \ ,$$

$$x = 0{,}125\frac{t^2}{2} \ \ [\mathrm{m}] \ .$$

Metoda II. Deoarece sistemul de corpuri considerat are un singur grad de libertate, legea sa de mişcare se mai poate determina şi pe baza teoremei energiei cinetice pentru sisteme materiale, aplicată sub forma sa diferențială:

$$dE_c = dL^d + dL^l + dL^i \ .$$

Având în vedere faptul că legăturile interioare sunt ideale, se obține $dL^i = 0$. Pentru calculul lucrului mecanic elementar dL^l al reacțiunilor legăturilor exterioare, se observă că forțele de frecare F_{f1} şi F_{f2} sunt aplicate în centrele instantanee de rotație I_1, respectiv I_2, deci nu dau lucru mecanic, astfel încât numai F_{f3} va efectua lucru mecanic. Pentru calculul acestui lucru mecanic elementar este necesar să se determine reacțiunea normală N_3, care se obține uşor din ecuația de momente față de C_2 pentru bară:

$$2R\mu_3 N_3 + 6RN_3 + R\frac{25}{4}\frac{G}{g}\frac{2}{3}\ddot{x}_1 - 3R\frac{25}{4}G = 0 \ ,$$

$$N_3 = G\left(3 - \frac{2}{3g}\ddot{x}_1\right) \ .$$

Ca urmare, rezultă:

$$dL^l = -\mu_3 N_3 dx_3 = -\frac{G}{8}\left(3 - \frac{2}{3g}\ddot{x}_1\right)\frac{2}{3}dx_1 \ ,$$

$$dL^d = Md\theta_1 = \frac{3}{2}GR\,\frac{dx_1}{3R} = \frac{1}{2}Gdx_1 \ ;$$

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{10G}{g}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{G}{g}\frac{R^2}{2} + \frac{9G}{g}\frac{9R^2}{2}\right)\frac{\dot{x}_1^2}{9R^2} + \frac{1}{2}\frac{4G}{g}\frac{4}{9}\dot{x}_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{4G}{g}\frac{4R^2}{2}\frac{\dot{x}_1^2}{9R^2} + \frac{1}{2}\frac{25}{4}\frac{G}{g}\frac{4}{9}\dot{x}_1^2 = 10\frac{G}{g}\dot{x}_1^2 \ ,$$

$$dE_c = 20\frac{G}{g}\dot{x}_1 d\dot{x}_1 \ ; \quad 20\frac{G}{g}\dot{x}_1 d\dot{x}_1 = G\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\ddot{x}_1}{18g}\right)dx_1 \ ,$$

de unde, împărțind cu dt şi simplificând cu $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} > 0$, se obține aceeaşi accelerație $\ddot{x}_1$ ca şi prin metoda precedentă.

deci se obține aceeaşi lege de mişcare ca şi prin metoda precedentă.

b) Reacțiunile legăturilor se determină prin înlocuirea în relațiile corespunzătoare obținute prin prima metodă a valorii constante a accelerației centrului troliului, deci rezultă:

$$N_1 = 10G\ , \quad F_{f1} = \frac{261}{718}G = 0{,}3635\,G\ ,$$

$$N_2 = \frac{10423}{1436}G = 7{,}26G\ , \quad F_{f2} = -\frac{159}{718}G = -0{,}221G\ ,$$

$$N_3 \cong 3G\ , \quad F_{f3} = 0{,}375G\ ,$$

$$T = \frac{171}{718}G = 0{,}238G\ ,$$

$$X = \frac{153}{359}G = 0{,}426G\ , \quad Y = \frac{4679}{1436}G = N_2 - 4G = 3{,}26G\ .$$

c) Pentru a fi îndeplinită condiția de rostogolire fără alunecare a corpurilor 1 şi 2 pe planul orizontal, este necesar ca forțele de frecare F_{f1} şi F_{f2} să nu depăşească valoarea lor maximă $\mu_1 N_1$, respectiv $\mu_2 N_2$, astfel încât rezultă:

$$\mu_1 \geq \frac{F_{f1}}{N_1} = 0{,}03635\ , \quad \mu_2 \geq \frac{|F_{f2}|}{N_2} = 0{,}03044\ .$$

Observație. Dacă accelerația centrului de greutate C_1 al troliului atinge sau depăşeşte valoarea $9g/2$, se observă că reacțiunea normală N_3 devine nulă, deci capătul A al barei nu se mai sprijină pe planul orizontal. Valoarea corespunzătoare a momentului M aplicat troliului se obține uşor cu ajutorul teoremei energiei cinetice, deoarece în acest caz forța de frecare F_{f3} va fi şi ea nulă şi rezultă, de asemenea, $dL^{l} = 0$. Ca urmare, se obține:

$$20\frac{G}{g}\dot{x}_1 d\dot{x}_1 = \frac{M}{3R}dx_1\ , \quad \ddot{x}_1 = \frac{Mg}{60GR}\ , \quad \ddot{x}_1 \geq \frac{9g}{2}\ , \quad M \geq 270GR\ .$$

Pentru a se realiza mişcarea sistemului cu o accelerație atât de mare, valorile minime ale coeficienților de frecare μ_1 şi μ_2 vor rezulta mult mai mari, din condiția de rostogolire fără alunecare a corpurilor 1 şi 2 pe planul orizontal.

3.3.4. Sistemul de corpuri omogene din fig. 3.3.4, în care sunt date dimensiunile geometrice şi greutăţile corpurilor, porneşte din repaus din poziţia din figură, pentru care porţiunea de fir dintre scripeţii S_1 şi S_2 este orizontală şi paralelă cu axa Ox legată de placa dreptunghiulară antrenată în mişcare de rotaţie în jurul axei fixe verticale O_1z_1. Ştiind că frecările din articulaţii şi greutăţile scripeţilor sunt neglijabile, că firul este perfect flexibil şi inextensibil şi că placa se mişcă într-un mediu rezistent ce respectă legea lui Newton privind rezistenţa mediului ($dF = kv^2dA$), să se determine:

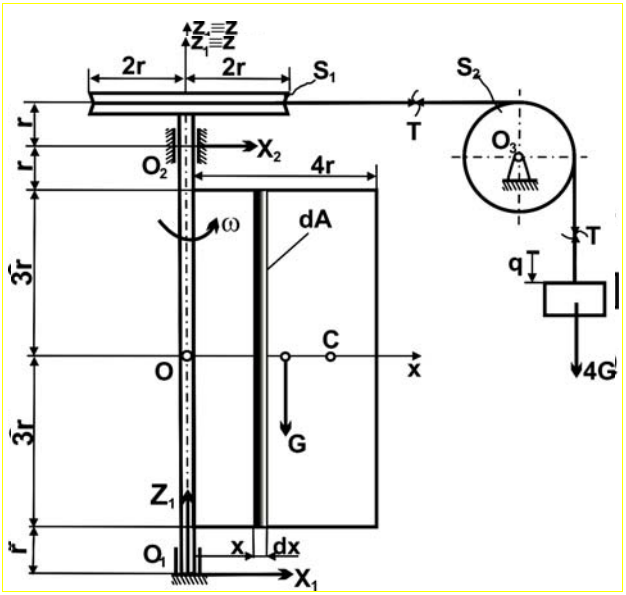


Fig. 3.3.4

a) expresiile vitezei şi acceleraţiei corpului de greutate 4G în funcţie de deplasarea sa q pe verticală, măsurată de la începutul mişcării;

b) viteza limită a corpului de greutate 4G şi viteza unghiulară limită a plăcii după un timp foarte mare de la începutul mişcării;

c) reacţiunile din lagărele O_1 şi O_2 la momentul în care placa a efectuat un număr întreg N de rotaţii complete.

Rezolvare

Înainte de a trece efectiv la rezolvarea problemei, este necesar să se efectueze reducerea forţelor rezistente paralele între ele şi distribuite după legea lui Newton privind rezistenţa mediului pe suprafaţa plăcii, la un moment oarecare al mişcării sistemului. Considerând ca parametru de poziţie al sistemului deplasarea q a corpului de greutate 4G, unghiul θ de rotaţie a plăcii, viteza sa unghiulară ω şi viteza v a unui punct al elementului de arie dA din fig. 3.3.4 vor fi:

$$\theta = \frac{q}{2r}\ , \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\dot{q}}{2r}\ , \qquad v = \omega x = \frac{\dot{q}x}{2r}\ ,$$

astfel încât rezultă:

$$dF = k\frac{\dot{q}^2x^2}{4r^2}6r\,dx = \frac{3}{2}\frac{k}{r}\dot{q}^2x^2dx \ , \qquad F = \int_0^{4r} dF = 32kr^2\dot{q}^2 \ ,$$

$$M = -\int_0^{4r} x\,dF = -96kr^3\dot{q}^2 \ , \qquad x_C = \frac{M}{-F} = 3r \ ,$$

unde s-a ţinut seama de faptul că rezultanta F a forţelor rezistente este orientată în sensul negativ al axei Oy şi poate fi aplicată în centrul C al acestor forţe paralele.

a) **Metoda I.** Deoarece scripetele fix S_2 este ideal şi are masa neglijabilă, eforturile dinamice din cele două porţiuni ale firului trecut peste acest scripete vor fi egale, având valoarea comună notată cu T în fig. 3.3.4. Aplicând ecuaţia de mişcare a unui corp cu axă fixă pentru placă şi legea fundamentală a dinamicii pentru corpul de greutate 4G, se obţin ecuaţiile:

$$\frac{G}{g}\frac{16r^2}{3}\ddot{\theta} = 2rT - 96kr^3\dot{q}^2 \ , \qquad \frac{4G}{g}\ddot{q} = 4G - T \ ,$$

din care rezultă:

$$T = 4G - \frac{4G}{g}\ddot{q} \ , \qquad \ddot{q} = \frac{3g}{4}\left(1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}\right) \ , \qquad c = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{G}{3k}} \ ,$$

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dq}\left(\dot{q}^2\right) \ , \qquad -c^2\ln\left(1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}\right) = \frac{3g}{2}q \ , \qquad \dot{q} = c\sqrt{1 - e^{-\lambda q}} \ ,$$

$$\lambda = \frac{3g}{2c^2} = 18r^2\frac{kg}{G} \ , \qquad \ddot{q} = \frac{3g}{4}e^{-\lambda q} \ .$$

Metoda II. Sistemul considerat având un singur grad de libertate, pentru studiul mişcării sale se poate aplica teorema energiei cinetice sub forma diferenţială:

$$dE_c = dL^d \ , \qquad E_c = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{16r^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{4G}{g}\dot{q}^2 = \frac{8}{3}\frac{G}{g}\dot{q}^2 \ ,$$

$$dE_c = \frac{16}{3}\frac{G}{g}\dot{q}d\dot{q} \ , \qquad dL^d = 4Gdq + Md\theta = 4G\left(1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}\right)dq \ ,$$

din care se obţine aceeaşi ecuaţie diferenţială a mişcării sale.

b) Pentru un timp foarte mare de mişcare al sistemului se poate considera că q tinde la infinit, deci viteza limită a corpului de greutate 4G va fi egală cu constanta c. Viteza unghiulară limită a plăcii rezultă imediat:

$$\omega_0 = \lim_{q\to\infty}\omega = \frac{1}{2r}\lim_{q\to\infty}\dot{q} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{4r^2}\sqrt{\frac{G}{3k}} \ .$$

c) Pentru un număr N de rotații complete ale plăcii rezultă:

$$\theta = 2\pi N\ ,\quad q = 4\pi rN\ ,\quad \dot\theta = \frac{c}{2r}\sqrt{1-\gamma}\ ,\quad \ddot\theta = \frac{3g}{8r}\gamma\ ,\quad \gamma = e^{-4\pi rN\lambda}\ ,$$

unde γ este o constantă adimensională pozitivă cunoscută, având valoarea mai mică decât 1. Deoarece la momentul considerat placa va fi, de asemenea, în poziția din fig. 3.3.4, ca şi la momentul inițial al mişcării, aplicând principiul lui d′Alembert pentru placă şi exprimând proiecțiile pe axele sistemului de referință Oxyz legat de placă, mai puțin ecuația de momente față de axa fixă Oz, se obțin ecuațiile:

$$X_1 + X_2 + T + \frac{G}{g}2r\dot\theta^2 = 0\ ,\quad Y_1 + Y_2 - F - \frac{G}{g}2r\ddot\theta = 0\ ,\quad Z_1 - G = 0\ ,$$

$$4rY_1 - 4rY_2 = 0\ ,\quad 5rT + 4rX_2 - 4rX_1 + 2rG = 0\ ,\quad T = G(4-3\gamma)\ ,$$

din care se determină reacțiunile din lagăre:

$$X_1 = \frac{G}{8}\left(3(2-\gamma) - \frac{2c^2}{gr}(1-\gamma)\right)\ ,\quad X_2 = -\frac{G}{8}\left(38 - 27\gamma + \frac{2c^2}{gr}(1-\gamma)\right)\ ,$$

$$F = \frac{8}{3}G(1-\gamma)\ ,\quad Y_1 = Y_2 = \frac{G}{24}(32-23\gamma)\ ,\quad Z_1 = G\ .$$

3.3.5. Regulatorul centrifugal de construcție cât mai simplă, reprezentat schematic în fig. 3.3.5, are următoarele elemente componente: tija sa verticală, pe care sunt articulate două bare omogene identice, fiecare de greutate G şi lungime 3ℓ, precum şi manşonul D de greutate Q, care este menținut într-o anumită poziție pe tijă prin intermediul a două fire inextensibile de aceeaşi lungime 2ℓ, legate în punctele B_1 şi B_2 de bare, pentru care $OB_1 = OB_2 = 2\ell$. Neglijând frecările, să se determine parametrul de poziție $\lambda = OD$ al manşonului pe tijă în funcție de viteza unghiulară ω_0 constantă a regulatorului considerat.

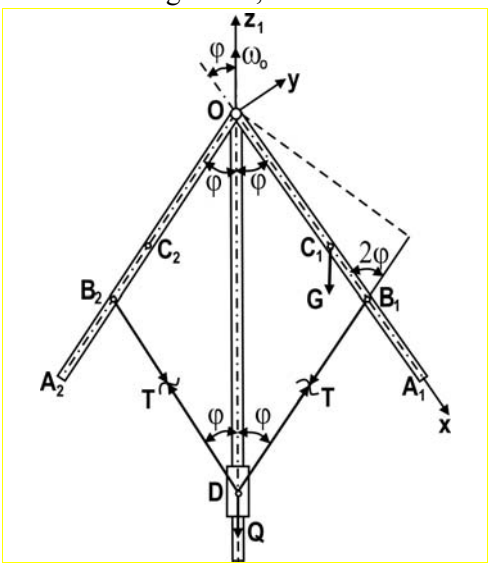


Fig. 3.3.5

Rezolvare

Din datele problemei rezultă că patrulaterul OB_1DB_2 este un romb cu

lungimea laturilor 2ℓ, pentru care unghiul φ din fig. 3.3.5 va depinde de viteza unghiulară ω_0 constantă a regulatorului, când se realizează echilibrul relativ al barelor față de tija regulatorului. Pentru a determina această dependență, este necesar să se aplice teorema momentului cinetic față de punctul fix O pentru bare, astfel încât în ecuațiile corespunzătoare să nu apară reacțiunile articulației O, care nu sunt cerute în enunț. În primul rând, mai este necesar să se determine eforturile dinamice din fire, care, datorită simetriei față de axa fixă Oz_1, vor avea aceeaşi valoare T. Din condiția de repaus relativ al manşonului pe tijă se obține:

$$2T\cos\varphi - Q = 0\ , \quad T = \frac{Q}{2\cos\varphi}\ .$$

Pe baza simetriei menționate se observă că este suficient să se aplice teorema momentului cinetic numai pentru una din cele două bare şi în fig. 3.3.5 s-a ales bara OA_1. Pentru calculul momentului cinetic al barei considerate în raport cu punctul său fix O, în fig. 3.3.5 s-a reprezentat şi sistemul de referință Oxyz legat de ea, ale cărui axe trebuie să fie principale de inerție. Față de acest sistem de referință rezultă:

$$\omega_x = -\omega_0\cos\varphi\ , \quad \omega_y = \omega_0\sin\varphi\ , \quad \omega_z = \dot\varphi\ ; \quad J_x = 0\ , \quad J_y = J_z = 3\frac{G}{g}\ell^2\ ;$$

$$\vec K_O = J_x\omega_x\vec i + J_y\omega_y\vec j + J_z\omega_z\vec k = 3\frac{G}{g}\ell^2\left(\omega_0\sin\varphi\,\vec j + \dot\varphi\,\vec k\right),$$

$$\frac{d\vec K_O}{dt} = \frac{\partial\vec K_O}{\partial t} + \vec\omega\times\vec K_O = 3\frac{G}{g}\ell^2\left(2\omega_0\dot\varphi\cos\varphi\vec j + \left(\ddot\varphi - \omega_0^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\vec k\right).$$

Prin aplicarea teoremei momentului cinetic se obțin ecuațiile:

$$\dot\varphi = 0\ , \quad 3\frac{G}{g}\ell^2\left(\ddot\varphi - \omega_0^2\sin\varphi\cos\varphi\right) = -\frac{3\ell}{2}G\sin\varphi - 2\ell T\sin 2\varphi\ ,$$

din care, după înlocuirea valorii determinate a efortului T, rezultă:

$$\cos\varphi = \frac{(3G+4Q)g}{6G\ell\omega_0^2}\ , \quad \lambda = 4\ell\cos\varphi = \frac{2(3G+4Q)}{3G}\frac{g}{\omega_0^2}\ .$$

3.3.6. Se consideră mecanismul de ridicat din fig. 3.3.6, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care sunt date greutățile şi razele scripeților, iar frecările se consideră neglijabile. Pentru ridicarea la o înălțime h a sarcinii de greutate $Q = 47G$ în 3 etape, se aplică scripetelui fix un cuplu de moment M cu următoarele valori constante în fiecare etapă a mişcării:

- în prima etapă M_1, pentru care sarcina atinge viteza $v_0 = 1{,}2\text{m/s}$ în intervalul de timp $t_1 = 1{,}5\text{s}$;

- în a doua etapă M_2, pentru mişcarea uniformă a sarcinii cu durata $t_2 = 13s$;

- în etapa a treia M_3, pentru care sarcina se opreşte la înălțimea h în intervalul de timp $t_3 = 1{,}5s$.

Considerând accelerația gravitațională $g = 10\ m/s^2$, să se determine:

a) relațiile cinematice, exprimând parametrii de poziție din fig. 3.3.6 în funcție de deplasarea x a sarcinii pe verticală;

b) valorile momentului M în cele 3 etape şi înălțimea h;

c) eforturile dinamice din fire în etapa a treia a mişcării.

Răspunsuri

a) $x_1 = x$, $\theta_1 = \frac{x}{R}$, $x_2 = 2x$, $\theta_2 = \frac{2x}{R}$, $\theta_3 = \frac{4x}{R}$;

b) $M_1 = \frac{55}{4}GR$, $M_2 = \frac{25}{2}GR$, $M_3 = \frac{45}{4}GR$, $h = 17{,}4m$;

c) $T_1 = 43{,}24G$, $T_2 = 22{,}10G$, $T_3 = 22{,}06G$, $T_4 = 11{,}49G$, $T_5 = 11{,}41G$.

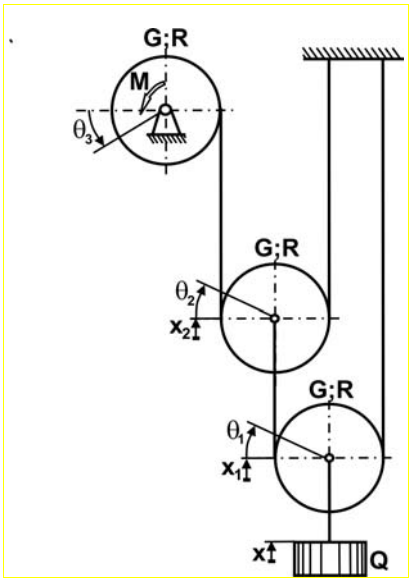


Fig. 3.3.6

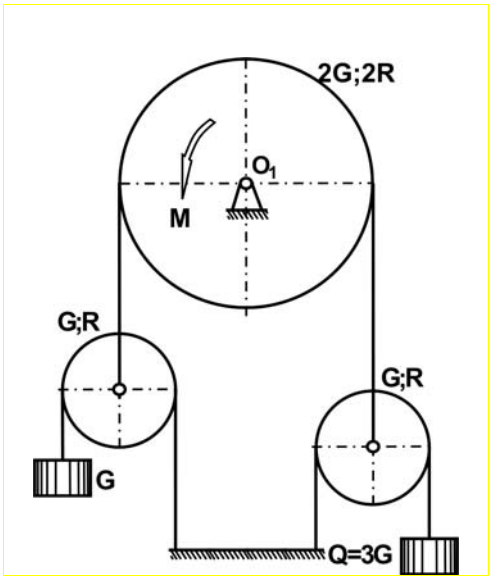


Fig. 3.3.7

3.3.7. Se consideră mecanismul de ridicat din fig. 3.3.7, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care sunt date greutăţile corpurilor şi razele scripeţilor, iar frecările se consideră neglijabile. Ştiind că mecanismul porneşte din repaus sub acţiunea unui cuplu motor de moment $M = 16GR$ aplicat scripetelui fix, să se determine:

a) legea de mişcare a corpului de greutate $Q = 3G$;

b) eforturile dinamice din fire.

Răspunsuri

a) $x = \frac{1}{5} g t^2$;

b) $T_1 = \frac{21}{5} G = 4{,}2G$, $T_2 = 4{,}3G$, $T_3 = 9{,}9G$,

$T_4 = 1{,}7G$, $T_5 = \frac{3}{5} G = 0{,}6G$, $T_6 = 0{,}5\,G$.

3.3.8. Se consideră mecanismul de ridicat din fig. 3.3.8, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care se dau greutăţile şi razele tamburilor troliului cu axă fixă orizontală, greutatea şi raza scripetelui mobil, precum şi greutatea sarcinii Q, iar frecările sunt neglijabile. Ştiind că mecanismul porneşte din repaus sub acţiunea unui cuplu motor de moment $M = 30GR$ aplicat troliului, să se determine:

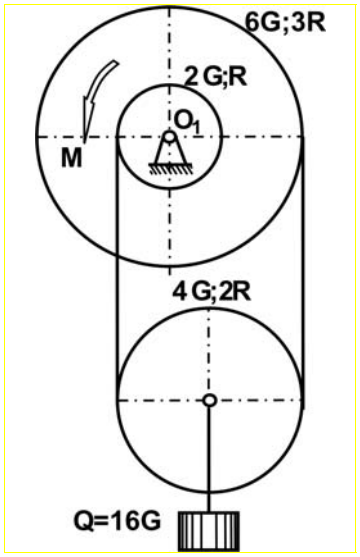


Fig. 3.3.8

a) legea de mişcare a sarcinii;

b) eforturile dinamice din fire.

Răspunsuri

a) $x = \frac{5}{56} g t^2$;

b) $T_1 = \frac{132}{7} G = 18{,}86G$,

$T_2 = \frac{80}{7} G = 11{,}4G$,

$T_3 = \frac{85}{7} G = 12{,}14G$.

3.3.9. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 3.3.9, pentru care sunt date greutățile corpurilor şi razele scripeților. Firele se consideră perfect flexibile şi inextensibile, iar frecările din articulații şi frecarea de rostogolire pe planul orizontal a scripetelui 1, care se rostogoleşte fără alunecare, sunt neglijabile. Ştiind că sistemul porneşte din repaus sub acțiunea unui cuplu motor de moment $M = 18GR$ aplicat scripetelui 1, să se determine:

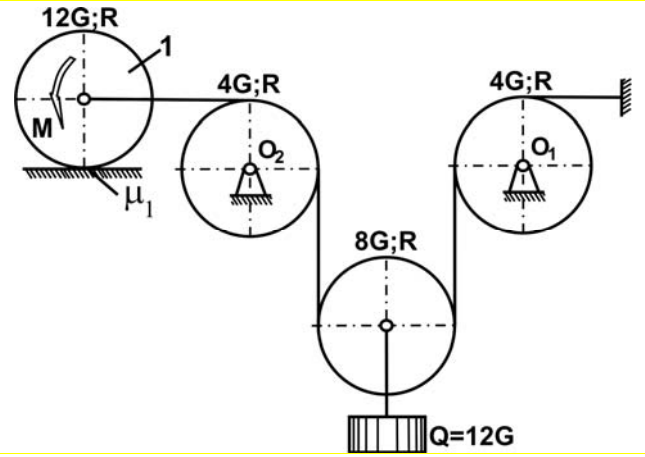


Fig. 3.3.9

a) legea de mişcare a corpului de greutate $Q = 12G$;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valoarea minimă a coeficientului de frecare de alunecare μ_1 dintre scripetele 1 şi planul orizontal pentru a fi îndeplinită condiția de rostogolire fără alunecare a acestuia.

Răspunsuri

a) $x = \frac{1}{13} g t^2$;

b) $T_1 = \frac{162}{13} G = 12{,}46G$, $T_2 = \frac{154}{13} G = 11{,}85G$, $T_3 = \frac{180}{13} G = 13{,}85G$,

$T_4 = T_5 = \frac{146}{13} G = 11{,}43G$;

c) $\mu_1 \geq \frac{35}{26} = 1{,}346$.

3.3.10. Un troliu omogen cu 3 tamburi este suspendat între două ghidaje verticale, între care se poate mişca fără frecare, printr-un fir vertical perfect flexibil şi

inextensibil înfăşurat pe tamburul său de rază 2R. Pe tamburul său de rază R este înfăşurat un alt fir ideal, care are legat la celălalt capăt un corp de greutate $Q = 13G$ (vezi fig. 3.3.10).

a) Să se determine acceleraţia a_Q a corpului de greutate Q, acceleraţia a_O a centrului O al troliului şi eforturile dinamice din fire.

b) Să se determine aceleaşi elemente, dacă firul de suspendare al troliului este înfăşurat pe tamburul său de rază R, iar celălalt fir pe tamburul de rază 2R.

Răspunsuri

a) $a_Q = \frac{5g}{11} = 4{,}46\ m/s^2$, $a_O = \frac{10}{11}g = 8{,}92\ m/s^2$; $T_1 = \frac{78}{11}G = 7{,}09G$,

$T_2 = \frac{84}{11}G = 7{,}636G$.

b) $a_Q = -a_O = \frac{7g}{37} = 1{,}856\ m/s^2$;

$T_1 = \frac{390}{37}G = 10{,}54G$, $T_2 = \frac{654}{37}G = 17{,}68G$.

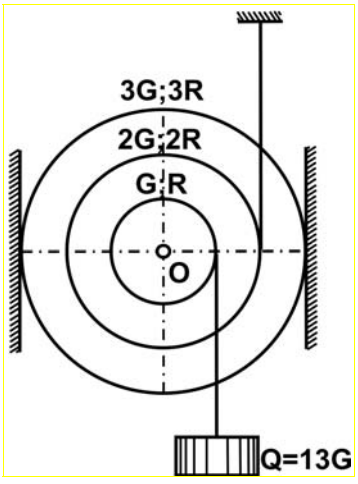


Fig. 3.3.10

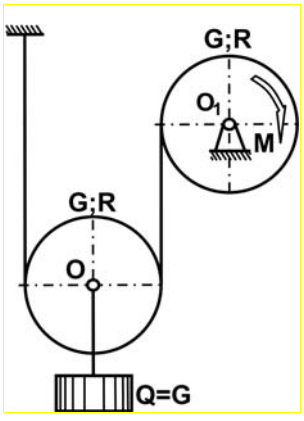


Fig. 3.3.11

3.3.11. Dacă se ridică o sarcină de greutate mică $Q = G$ cu ajutorul mecanismului de ridicat din fig. 3.3.11, acţionat de un cuplu motor de moment $M = 4GR$, neglijând frecările şi rigiditatea firelor să se determine:

a) accelerația sarcinii;
b) eforturile dinamice din fire.

Răspunsuri

a) $a_Q = \frac{4}{3}g = 13{,}08\ m/s^2$;

b) $T_1 = \frac{7}{3}G$, $T_2 = \frac{8}{3}G$, $T_3 = 2G$.

3.3.12. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 3.3.12, pentru care se cunoaşte $\mu_2 = 0{,}6$ şi se ştie că troliul 1 se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal. Dacă sistemul porneşte din repaus şi se neglijează frecarea din articulația O_1, frecarea de rostogolire a troliului 1 şi rigiditatea firelor, să se determine:

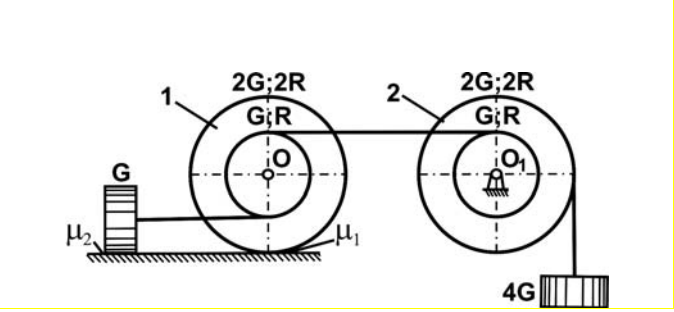


Fig. 3.3.12

a) legea de mişcare a corpului de greutate $Q = 4G$;
b) eforturile dinamice din fire;
c) valoarea minimă a coeficientului de frecare μ_1 pentru a fi îndeplinită condiția de rostogolire fără alunecare a troliului 1.

Răspunsuri

a) $x = \frac{35{,}1}{101}gt^2 = 3{,}41t^2\ [m]$;

b) $T_1 = \frac{72{,}3}{101}G = 0{,}716G$, $T_2 = \frac{176{,}9}{202}G = 0{,}876G$, $T_3 = \frac{123{,}2}{101}G = 1{,}22G$;

c) $\mu_1 \geq \frac{108{,}1}{606} = 0{,}178$.

3.3.13. Un disc circular omogen de greutate G şi rază R se rostogoleşte fără alunecare pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat cu unghiul α faţă de planul orizontal. În centrul O al discului este legat un fir ideal, trecut peste un scripete fix identic cu discul, astfel ca porţiunea sa corespunzătoare să fie paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat, iar la celălalt capăt al firului este legat un corp de greutate $Q = 3G$ (vezi fig. 3.3.13). Neglijând frecarea din articulaţia O_1 şi frecarea de rostogolire a discului, să se determine:

a) acceleraţia corpului de greutate Q;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valoarea minimă a coeficientului de frecare μ pentru a fi îndeplinită condiţia de rostogolire fără alunecare a discului.

Răspunsuri

a) $a_Q = \frac{g}{5}(3 - \sin\alpha)$;

b) $T_1 = \frac{3G}{5}(2 + \sin\alpha)$, $T_2 = \frac{G}{10}(9 + 7\sin\alpha)$;

c) $\mu \geq \frac{3 - \sin\alpha}{10\cos\alpha}$.

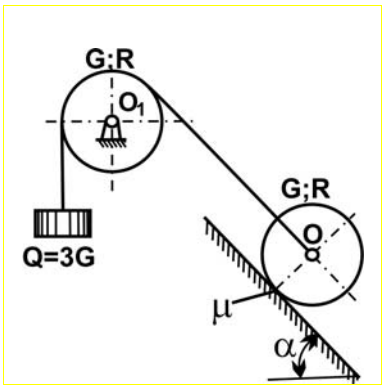


Fig. 3.3.13

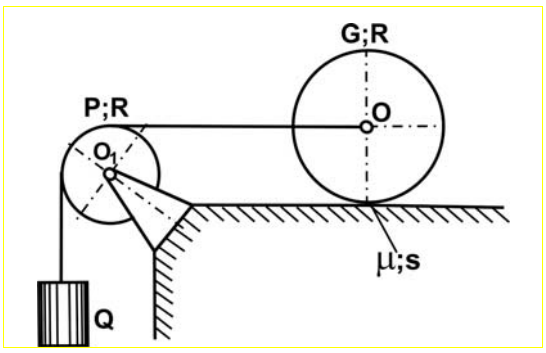


Fig. 3.3.14

3.3.14. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 3.3.14, pentru care datele sunt notate pe figură. Ştiind că discul circular cu centrul O se rostogoleşte fără

alunecare pe un plan orizontal aspru şi neglijând frecarea din articulația O_1 şi rigiditatea firelor, să se determine:

a) accelerația corpului de greutate Q;
b) eforturile dinamice din fire;
c) valoarea minimă a coeficientului de alunecare μ pentru a fi îndeplinită condiția de rostogolire fără alunecare a discului.

Răspunsuri

a) $a_Q = \dfrac{2g(RQ - sG)}{R(P + 2Q + 3G)}$;

b) $T_1 = \dfrac{Q}{R}\,\dfrac{PR + G(3R + 2s)}{P + 2Q + 3G}$,

$T_2 = \dfrac{G}{R}\,\dfrac{3RQ + s(P + 2Q)}{P + 2Q + 3G}$;

c) $\mu \geq \dfrac{RQ + s(P + 2Q + 2G)}{R(P + 2Q + 3G)}$.

3.3.15. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 3.3.15, acționat de un cuplu motor de moment $M = 6GR$ aplicat scripetelui fix cu centrul O_1, pentru care datele sunt notate pe figură. Neglijând masa scripetelui mic S, frecările din articulații şi rigiditatea firelor, să se determine:

a) accelerația corpului care urcă pe planul înclinat;
b) eforturile dinamice din fire.

Răspunsuri

a) $a = \dfrac{4g}{7}(1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, $\sin\alpha + \mu\cos\alpha < 1$;

b) $T_1 = \dfrac{G}{7}(4 + 3\sin\alpha + 3\mu\cos\alpha)$, $T_2 = \dfrac{G}{7}(5 + 2\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha)$,

$T_3 = \dfrac{3G}{7}(6 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, $T_4 = \dfrac{G}{7}(19 + 2\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha)$.

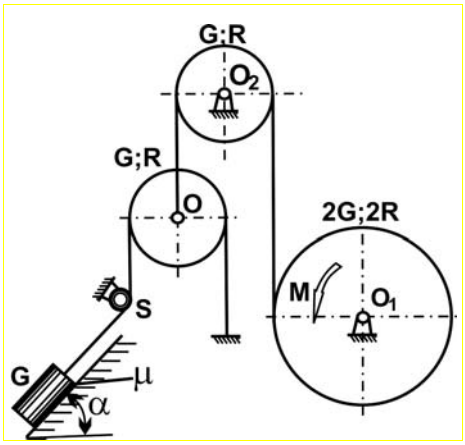


Fig. 3.3.15

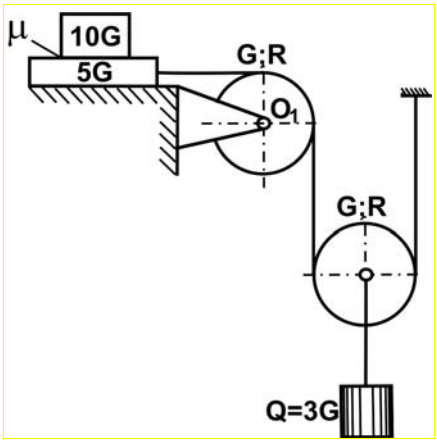


Fig. 3.3.16

3.3.16. Pentru sistemul de corpuri omogene din fig. 3.3.16 se neglijează rigiditatea firelor şi toate frecările, cu excepția frecării de alunecare dintre cele două corpuri paralelipipedice suprapuse, aşezate pe un plan orizontal luciu, caracterizată prin coeficientul de frecare μ de valoare mică. Să se determine:

a) accelerația corpului de greutate $Q = 3G$ şi eforturile dinamice din fire la începutul mişcării sistemului;

b) valoarea maximă a coeficientului de frecare μ pentru ca să alunece corpul paralelipipedic superior peste celălalt, precum şi noua accelerație a corpului de greutate Q după ce acest corp paralelipipedic cade pe planul orizontal.

Răspunsuri

a) $a_Q = \dfrac{8g}{133} = 0{,}59\ \mathrm{m/s^2}$, $T_1 = \dfrac{375}{133}G = 2{,}82G$, $T_2 = \dfrac{252}{133}G = 1{,}895G$,

$T_3 = \dfrac{248}{133}G = 1{,}865G$, $T_4 = \dfrac{240}{133}G = 1{,}8G$;

b) $a'_Q = \dfrac{8g}{53} = 1{,}48\ \mathrm{m/s^2}$, $\mu < \dfrac{8}{133} = 0{,}06$.

3.3.17. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 3.3.17, pentru care datele sunt notate pe figură şi se neglijează rigiditatea firelor, frecarea din articulația O şi frecarea de alunecare dintre corpul paralelipipedic de greutate 3G şi planul orizontal. Pentru valori mari ale coeficientului de frecare μ dintre cele două corpuri paralelipipedice, pentru care nu are loc alunecarea lor relativă, să se determine:

a) accelerația corpului de greutate $Q = 2G$;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valoarea minimă a coeficientului de frecare μ pentru a fi îndeplinită condiția din enunț.

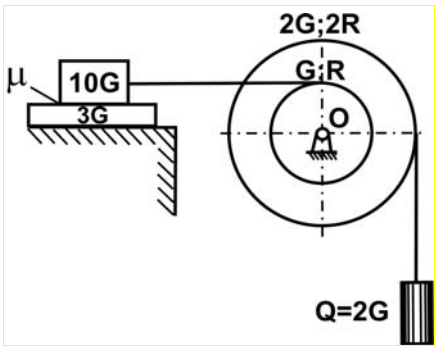


Fig. 3.3.17

Răspunsuri

a) $a_Q = \dfrac{16g}{51} = 3{,}08\ \mathrm{m/s^2}$;

b) $T_1 = \dfrac{104}{51}G = 2{,}04G$,

$T_2 = \dfrac{70}{51}G = 1{,}37G$;

c) $\mu \geq \dfrac{8}{170} = 0{,}05$.

3.3.18. O paletă sub forma unui disc circular cu centrul B, de greutate G şi rază R, se mişcă într-un mediu rezistent ce respectă legea lui Newton privind rezistența mediului ($dF = kv^2 dA$, v fiind viteza elementului de arie dA din fig. 3.3.18). Brațul paletei de lungime R şi masă neglijabilă este solidarizat la mijlocul O al axei verticale O_1O_2 de lungime 2R în poziție perpendiculară pe axă, care este montată la capetele sale în două lagăre cu frecările neglijabile ca în fig. 3.3.18. Cunoscând coeficientul de rezistență a mediului:

$$k = \frac{17\lambda G}{38\pi g R^3} ,$$

unde λ este o constantă adimensională dată, să se determine:

a) rezultanta F şi centrul C al forțelor paralele de rezistență a mediului, distribuite pe suprafața paletei, în funcție de viteza unghiulară momentană ω a paletei;

b) legea de mişcare a paletei, exprimând unghiul său de rotație θ ca funcție de timp, dacă la momentul inițial al mişcării i se imprimă viteza unghiulară ω_0 ;

c) reacțiunile dinamice din lagăre la un moment t al mișcării paletei;

d) numărul N de rotații executat de paletă până când viteza sa unghiulară scade la jumătate din cea inițială.

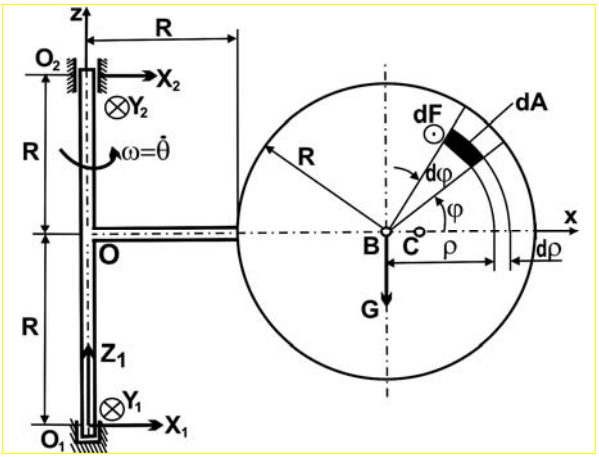


Fig. 3.3.18

Răspunsuri

a) $F=\dfrac{289}{152}\dfrac{G}{g}\lambda R\omega^2$, $x_C=OC=\dfrac{38}{17}R$;

b) $\theta=\dfrac{1}{\lambda}\ln\left(1+\lambda\omega_0 t\right)$;

c) $X_1=G\left(1-\gamma\right)$, $X_2=-G\left(1+\gamma\right)$,

$Y_1=Y_2=-\dfrac{15\lambda\gamma G}{304}$, $Z_1=G$, $\gamma=\dfrac{R\omega_0^2}{g\left(1+\lambda\omega_0 t\right)^2}$;

d) $N=\dfrac{\ln 2}{2\pi\lambda}$.

3.3.19. Bara omogenă AOB de lungime 3ℓ şi greutate 3G, îndoită în unghi drept în O astfel încât $OB = 2AO$, este articulată în O printr-o articulaţie cilindrică fără frecare de o axă fixă verticală ca în fig. 3.3.19. În poziţia în care unghiul dintre latura AO a barei şi axa fixă are valoarea φ dată, se imprimă sistemului o viteză unghiulară ω, astfel încât aceasta să rămână constantă în timpul mişcării sale ulterioare, dacă frecările din lagăre sunt neglijabile.

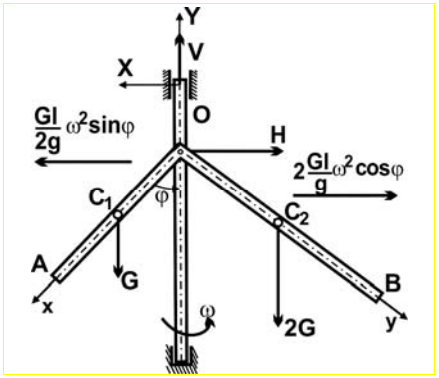


Fig. 3.3.19

a) Să se exprime ω în funcţie de φ.

b) Să se calculeze valorile componentelor V şi H ale reacţiunii articulaţiei O pentru valoarea determinată a vitezei unghiulare ω.

Răspunsuri

a) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{7\ell}\,\frac{4\cos\varphi - \sin\varphi}{\sin 2\varphi}}$, $0 < \varphi < \operatorname{arctg} 4$.

b) $V = 3G$, $H = \frac{3G}{14}\,\frac{(4\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{\sin 2\varphi}$.

3.4. Ciocniri şi percuţii

3.4.1. Un disc circular omogen de masă m şi rază r se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal astfel încât viteza $\vec{v}_O$ a centrului său O este constantă ca vector. La un moment dat, discul se ciocneşte ca în fig. 3.4.1 de un prag de înălţime $h < r/2$. Ştiind că ciocnirea este perfect plastică şi neglijând frecările, să se determine:

a) viteza unghiulară a discului şi viteza centrului său O la sfârşitul ciocnirii;

b) percuţia aplicată discului în timpul ciocnirii;

c) valoarea minimă a vitezei $\vec{v}_O$ pentru ca discul să poată sări peste prag în urma ciocnirii.

Rezolvare

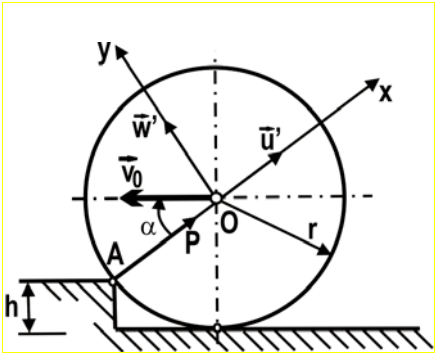


Fig. 3.4.1

a) Mişcarea dată în enunț a discului înainte de ciocnire se realizează numai dacă asupra discului acționează doar greutatea proprie şi reacțiunea normală a planului orizontal. În timpul ciocnirii sale de prag, aceste forțe au valoare medie neglijabilă față de valoarea medie a reacțiunii normale a muchiei pragului asupra sa. De asemenea, ținând seama de faptul că, pentru $h < r/2$, valoarea componentei tangențiale a vitezei punctului de contact A al discului cu pragul la începutul ciocnirii este mică, se poate neglija şi efectul percutant al forței de frecare din A. Ca urmare, în timpul ciocnirii, asupra discului acționează numai percuția P, aplicată în A după direcția normalei comune, după care s-a orientat axa Ox a sistemului de referință Oxyz legat de disc. Deoarece, tot timpul ciocnirii, distribuția de viteze a discului va fi de mişcare plană, pe baza legilor ciocnirilor este necesar să se determine componentele u' şi w' din fig. 3.4.1 ale vitezei centrului O al discului la sfârşitul ciocnirii, precum şi viteza sa unghiulară corespunzătoare ω', cunoscând parametrii cinematici v_0 şi $\omega = v_0/r$ la începutul ciocnirii. Proiectând legile ciocnirilor pentru disc pe axele sistemului de referință considerat, se obțin ecuațiile:

$$m\left(u' + v_O \cos\alpha\right) = P \ , \quad m\left(w' - v_O \sin\alpha\right) = 0 \ , \quad J_z\left(\omega' - \omega\right) = 0 \ ,$$

la care trebuie adăugată condiția ca ciocnirea să fie perfect plastică, din care rezultă $u' = 0$. Prin urmare, parametrii cinematici ai discului ceruți în enunț vor fi:

$$\omega' = \omega = \frac{v_O}{r} \ , \quad v'_O = w' = v_O \sin\alpha = \frac{r-h}{r} v_O \ .$$

b) Din prima dintre ecuațiile de mai sus rezultă:

$$P = m v_O \cos\alpha = \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r} m v_O \ .$$

c) Dacă se neglijează frecarea din A şi rezistența aerului, după ciocnire discul va avea o mişcare plană în planul vertical perpendicular pe muchia pragului, astfel încât viteza sa unghiulară se menține constantă, iar centrul său se va mişca la fel ca în mişcarea fără frecare a unui inel pe un arc de cerc cu viteza inițială w'. Pentru a sări peste prag, este necesar ca centrul discului să ajungă cu viteza nulă sau mai mare ca zero într-o astfel de poziție pe traiectoria sa, încât să urce pe verticală cu o înălțime

egală cu h. Aplicând teorema energiei cinetice pentru disc, de la sfârşitul ciocnirii până la momentul în care centrul său se ridică pe verticală cu înălţimea h, în condiţiile considerate se obţine:

$$\frac{m}{2}\left(v_O''\right)^2+\frac{1}{2}J_z\omega^2-\frac{m}{2}\left(v_O'\right)^2-\frac{1}{2}J_z\omega^2=-mgh\ ,$$

$$v_O''=\sqrt{\left(v_O'\right)^2-2gh}\geq 0\ ,\quad \frac{r-h}{r}v_O\geq\sqrt{2gh}\ ,\quad v_O\geq\frac{r\sqrt{2gh}}{r-h}\ .$$

Observaţie. Dacă frecarea din A nu poate fi neglijată, forţa de frecare corespunzătoare va avea o valoare medie mare în timpul ciocnirii şi va produce o percuţie tangenţială P_t, aplicată în A după direcţia şi sensul axei Oy, care are ca efect anularea şi a componentei tangenţiale a vitezei punctului de contact A în timpul ciocnirii. În acest caz, pe baza legilor ciocnirilor se obţin ecuaţiile:

$$m\left(u'+v_O\cos\alpha\right)=P\ ,\quad m\left(w'-v_O\sin\alpha\right)=P_t\ ,$$

$$J_z\left(\omega'-\omega\right)=-rP_t\ ,$$

la care se adaugă condiţiile:

$$u'=0\ ,\quad w'-r\omega'=0\ ,$$

astfel încât rezultă:

$$v_O'=w'=v_O\frac{3r-2h}{3r}\ ,\quad \omega'=v_O\frac{3r-2h}{3r^2}\ ,$$

$$P=mv_O\frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r}\ ,\quad P_t=mv_O\frac{h}{3r}\ .$$

Deoarece, după ciocnire, discul va avea o mişcare de rotaţie în jurul axei fixe Az′ paralelă cu Oz, până când centrul său ajunge pe aceeaşi verticală cu A, prin aplicarea teoremei energiei cinetice se obţine:

$$\frac{1}{2}J_{z'}\left(\omega''\right)^2-\frac{1}{2}J_{z'}\left(\omega'\right)^2=-mgh\ ,\quad \omega''=\sqrt{\left(\omega'\right)^2-\frac{4gh}{3r^2}}\ ,\quad v_O\geq\frac{2r\sqrt{3gh}}{3r-2h}\ .$$

În continuare, mişcarea discului va fi o mişcare plană de rostogolire fără alunecare pe planul orizontal superior al pragului cu viteza unghiulară ω'' constantă. Dacă valoarea coeficientului de frecare de alunecare este foarte mică, această mişcare a discului va fi de rostogolire cu alunecare, având parametrii cinematici determinaţi anterior.

3.4.2. Sistemul de două corpuri omogene din fig. 3.4.2, format din bara OA de lungime 2ℓ şi greutate G şi din placa ABD de greutate 3G sub formă de triunghi echilateral cu lungimea laturilor 2ℓ, se află în echilibru într-un plan vertical, corpurile fiind articulate între ele în A şi bara în punctul fix O prin articulaţii cilindrice fără

frecare. La un moment dat, la mijlocul laturii AB a plăcii se aplică o percuție dată P ca în figură, perpendiculară în planul plăcii pe latura sa AB.

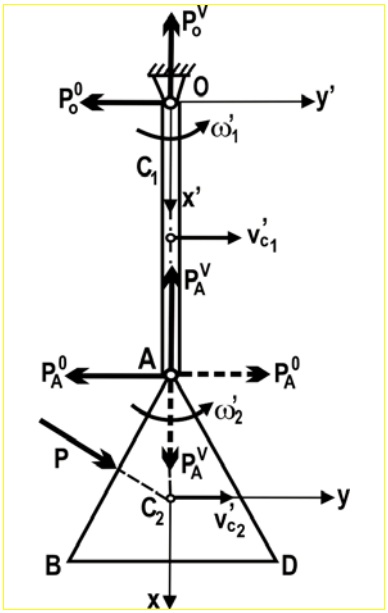


Fig. 3.4.2

a) Să se determine vitezele unghiulare ale corpurilor la sfârşitul ciocnirii şi percuțiile de legătură din articulații în timpul ciocnirii.

b) Să se calculeze aceleaşi elemente ale ciocnirii pentru datele numerice: $\ell = 0{,}1\text{m}$, $G = 5\ \text{N}$, $P = 14\ \text{kgm/s}$.

Rezolvare

a) În fig. 3.4.2 s-au reprezentat sistemele de referință $Ox'y'z'$, respectiv C_2xyz, legate de cele două corpuri, unde originea celui de-al doilea sistem de referință s-a luat în centrul de greutate C_2 al plăcii, deoarece aceasta are o distribuție de viteze de mişcare plană cu parametrii cinematici variabili în timpul ciocnirii. De asemenea, fără a se efectua separarea corpurilor, s-au reprezentat componentele verticale şi orizontale ale percuțiilor de legătură din articulații, notate cu indicele superior v, respectiv o, pentru articulația interioară din A fiind folosită linia continuă pentru componentele aplicate plăcii şi linia întreruptă pentru cele acționând asupra barei. Aplicând legile ciocnirilor pentru fiecare corp în parte, se obțin ecuațiile:

$$0 = \frac{P}{2} - P_A^v,\ \frac{3G}{g} v'_{C_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} P - P_A^o,\ J_z \omega_2' = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ell P_A^o;$$

$$0 = P_A^v - P_O^v,\ \frac{G}{g} v'_{C_1} = P_A^o - P_O^o,\ \ J_{z'} \omega_1' = 2\ell P_A^o,$$

în care se pot calcula imediat:

$$J_z = \frac{G}{g}\ell^2\ ,\quad J_{z'} = \frac{4}{3}\frac{G}{g}\ell^2\ ,\quad v'_{C_1} = \ell\omega_1'\ ,\quad v'_{C_2} = 2\ell\omega_1' + \frac{2\sqrt{3}}{3}\ell\omega_2'\ ,$$

astfel încât rezultă:

$$\omega_1' = \frac{3\sqrt{3}}{56}\frac{Pg}{G\ell}\ ,\quad \omega_2' = \frac{1}{14}\frac{Pg}{G\ell}\ ,$$

$$P_A^o = \frac{\sqrt{3}}{28}P\ ,\quad P_O^o = -\frac{\sqrt{3}}{56}P\ ,\quad P_A^v = P_O^v = \frac{1}{2}P\ .$$

b) Pentru datele numerice din enunţ şi $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ se obţin următoarele valori ale elementelor ciocnirii:

$$\omega_1' = 25{,}5\ \mathrm{s^{-1}}\ , \quad \omega_2' = 19{,}62\ \mathrm{s^{-1}}\ ,$$

$$P_A^o = 0{,}866\ \mathrm{kgm/s}\ , \quad P_O^o = -0{,}433\ \mathrm{kgm/s}\ , \quad P_A^v = P_O^v = 7\ \mathrm{kgm/s}\ .$$

3.4.3. Un corp rigid cu centrul de simetrie O este realizat prin solidarizarea ca în fig. 3.4.3 a unei bare AB de greutate 3G şi lungime 4R de un disc circular de rază R şi greutate 2G. Corpul astfel format este articulat în O printr-o articulaţie cilindrică fără frecare, iar între fusul articulaţiei şi corp este montat un arc spiral de constantă elastică la torsiune K, care este nedeformat în poziţia orizontală a barei. Se roteşte corpul în jurul articulaţiei cu un unghi θ_0 faţă de orizontală şi se lasă liber, iar la momentele în care bara ajunge din nou în poziţie orizontală au loc ciocniri repetate cu un opritor fix în punctul D al barei, pentru care $DB = R/2$. Cunoscând coeficientul de restituire la ciocnire de valoare 0,5 , acelaşi pentru toate ciocnirile, să se determine:

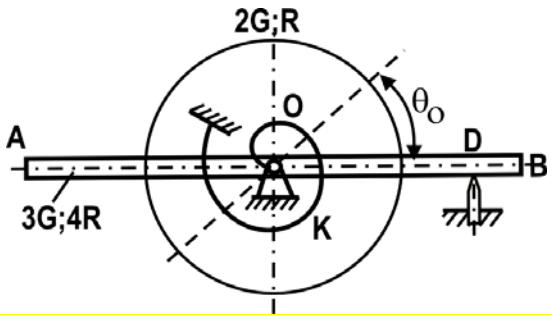


Fig. 3.4.3

a) vitezele unghiulare ale corpului la începutul şi sfârşitul celei de-a n-a ciocnire;

b) percuţia aplicată barei de opritor în timpul celei de-a n-a ciocnire;

c) durata mişcării corpului până la sfârşitul celei de-a n-a ciocnire.

Răspunsuri

a) $\omega_n = -\dfrac{\theta_0\omega_0}{2^{n-1}}\ , \quad \omega_n' = \dfrac{\theta_0\omega_0}{2^n}\ , \quad \omega_0 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{Kg}{5G}}\ ;$

b) $P = \dfrac{\theta_0}{2^{n-1}}\sqrt{\dfrac{5KG}{g}}\ ;$

c) $t_n = (2n-1)\dfrac{\pi}{2\omega_0}\ .$

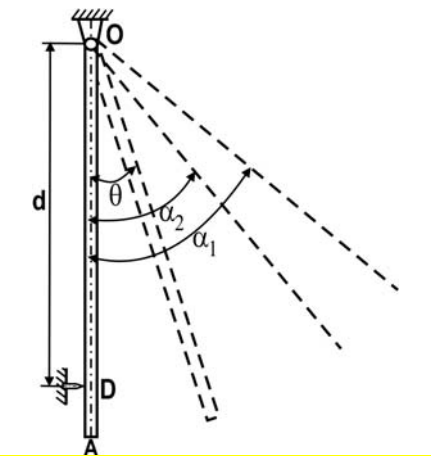


Fig. 3.4.4

3.4.4. Bara omogenă OA de lungime ℓ şi greutate G, articulată în punctul fix O printr-o articulaţie cilindrică fără frecare, este lăsată liber din poziţia în care unghiul θ format cu verticala are valoarea α_1. La momentul în care ajunge în poziţia verticală, bara se ciocneşte cu un opritor fix în punctul său D pentru care $OD = d$. Ştiind că, după ciocnire, bara se ridică până la un unghi θ maxim de valoare $\alpha_2 < \alpha_1$, aşa cum este reprezentat în fig. 3.4.4, să se determine:

a) coeficientul de restituire la ciocnire;

b) percuţia aplicată barei de opritor în timpul ciocnirii;

c) distanţa d pentru ca percuţia de legătură din articulaţie să fie nulă (D să fie centru de percuţie).

Răspunsuri

a) $R = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha_2}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_1}{2}}$;

b) $P = \dfrac{G\ell}{d}\sqrt{\dfrac{2\ell}{3g}}\left(\sin\dfrac{\alpha_1}{2} + \sin\dfrac{\alpha_2}{2}\right)$;

c) $d = \dfrac{2\ell}{3}$.

3.4.5. Bara omogenă OA de lungime ℓ şi greutate G, articulată în punctul fix O printr-o articulaţie cilindrică fără frecare, este lăsată liber din poziţia în care formează unghiul α_1 cu orizontala. La momentul în care ajunge în poziţie orizontală, bara se ciocneşte cu un opritor fix în punctul său D pentru care $OD = d$. Ştiind că, după ciocnire, bara se ridică până la un unghi maxim $\alpha_2 < \alpha_1$ faţă de orizontală, aşa cum este reprezentat în fig. 3.4.5, să se determine:

a) coeficientul de restituire la ciocnire;

b) percuția aplicată barei de opritor în timpul ciocnirii;

c) distanța d pentru ca percuția de legătură din articulație să fie nulă (D să fie centru de percuție).

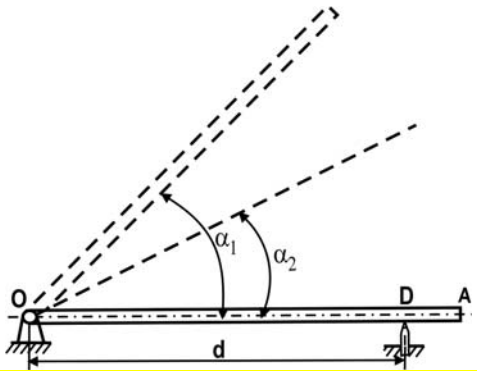


Fig. 3.4.5

Răspunsuri

a) $R = \sqrt{\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}}$;

b) $P = \dfrac{G\ell}{d}\sqrt{\dfrac{\ell}{3g}}\left(\sqrt{\sin\alpha_1} + \sqrt{\sin\alpha_2}\right)$;

c) $d = \dfrac{2\ell}{3}$.

3.4.6. Bara omogenă AB de greutate G şi lungime ℓ cade pe verticală, rămânând în poziție orizontală. La un moment dat al acestei mişcări de translație rectilinie, când viteza de translație a barei are valoarea v_0, aceasta se ciocneşte ca în fig. 3.4.6 de un opritor fix în punctul său D pentru care $BD = \ell/4$. Ştiind că ciocnirea este perfect plastică, să se determine:

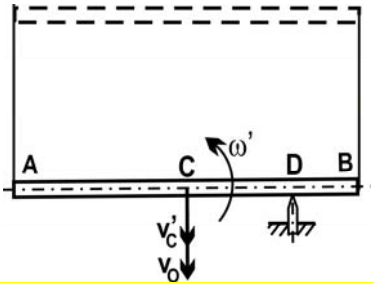


Fig. 3.4.6

a) viteza centrului de greutate C al barei şi viteza sa unghiulară la sfârşitul ciocnirii;

b) percuția aplicată barei de opritor în timpul ciocnirii.

Răspunsuri

a) $v_C' = \dfrac{3}{7}v_0$,

$\omega' = \dfrac{12}{7\ell}v_0$;

b) $P = \dfrac{4G}{7g}v_0$.

3.4.7. Bara omogenă OA de lungime ℓ şi greutate G, articulată în punctul fix O printr-o articulaţie cilindrică fără frecare, este lăsată liber din poziţia în care formează unghiul α_1 cu verticala. La momentul în care ajunge în poziţie verticală, bara se ciocneşte în capătul său A cu un corp paralelipipedic de greutate $G/2$, aflat în repaus pe un plan orizontal aspru, frecarea de alunecare dintre corp şi plan fiind caracterizată de coeficientul de frecare μ (vezi fig. 3.4.7). Ştiind că, după ciocnire, bara se roteşte în sens contrar până la un unghi maxim $\alpha_2 < \alpha_1$ faţă de verticală, iar corpul parcurge distanţa d pe planul orizontal până la oprire, să se determine:

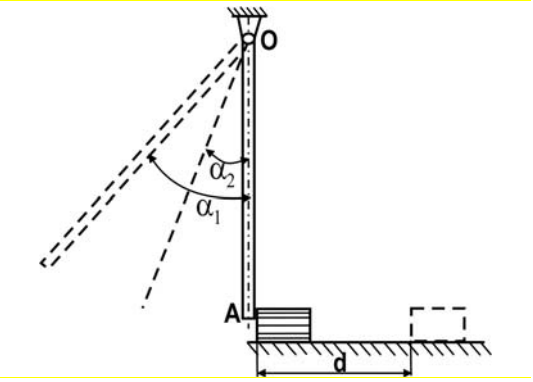


Fig. 3.4.7

a) coeficientul de restituire la ciocnire;

b) relaţiile între datele problemei pentru ca ciocnirea să se producă în condiţiile considerate;

c) coeficientul de restituire la ciocnire, distanţa d şi percuţia aplicată corpului de bară în timpul ciocnirii pentru datele numerice:

$G = 10\ \text{N}$, $\ell = \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0{,}318\text{m}$, $\mu = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)/5 = 0{,}629$, $\alpha_1 = 120°$, $\alpha_2 = 2\arcsin\sqrt{3}/10 = 20°$.

Răspunsuri

a) $R = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\mu d}{3\ell}} + \sin\dfrac{\alpha_2}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_1}{2}}$;

b) $\sin\dfrac{\alpha_1}{2} + \sin\dfrac{\alpha_2}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3\mu d}{\ell}}$, $\sin\dfrac{\alpha_1}{2} - \sin\dfrac{\alpha_2}{2} \geq \sqrt{\dfrac{\mu d}{3\ell}}$;

c) $R = 1$, $d = 0{,}72\ \text{m}$, $P = 1{,}52\ \text{kgm/s}$.

3.4.8. Bara omogenă OA de lungime ℓ şi greutate G, articulată în punctul fix O printr-o articulaţie cilindrică fără frecare, este lăsată liber din poziţia sa în care formează unghiul $\alpha = 30°$ faţă de orizontală. La momentul în care ajunge în poziţie verticală, bara se ciocneşte în capătul său A cu o bilă de greutate $G/2$, aflată în repaus pe un plan orizontal (vezi fig. 3.4.8). Cunoscând coeficientul de restituire la ciocnire $R = 0{,}5$, să se determine:

a) viteza bilei şi viteza unghiulară a barei la sfârşitul ciocnirii;
b) deviaţia maximă β faţă de verticală a barei după ciocnire;
c) percuţia din A şi percuţia de legătură din articulaţie în timpul ciocnirii.

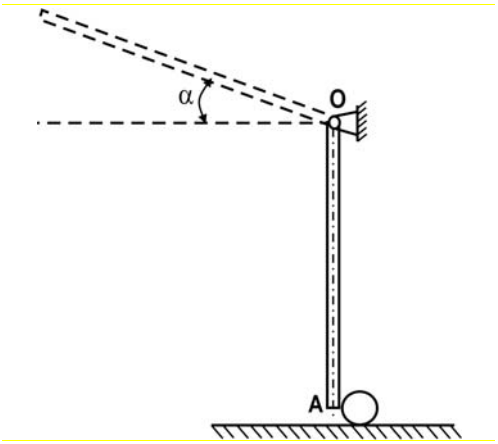


Fig. 3.4.8

Răspunsuri

a) $v' = \frac{9}{10}\sqrt{2g\ell}$, $\omega' = \frac{3}{10}\sqrt{\frac{g}{2\ell}}$;

b) $\beta = 2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{20} = 10°$;

c) $P_A = \frac{9G}{20}\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$, $P_O = \frac{9G}{40}\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$.

3.4.9. Bara omogenă O_1A de lungime ℓ şi greutate G, articulată în punctul fix O_1 printr-o articulaţie cilindrică fără frecare, este lăsată liber din poziţia sa verticală reprezentată cu linie întreruptă în fig. 3.4.9. La momentul în care bara O_1A ajunge în poziţie orizontală, capătul său A se ciocneşte cu capătul B al unei alte bare omogene BC de lungime 2ℓ şi greutate 2G, articulată la mijlocul său în punctul fix O_2 prin altă articulaţie cilindrică fără frecare şi aflată în repaus în poziţie orizontală. Cunoscând coeficientul de restituire la ciocnire $R = 2/3$, să se determine:

a) vitezele unghiulare ale barelor la sfârşitul ciocnirii;
b) percuţiile de legătură din articulaţii în timpul ciocnirii.

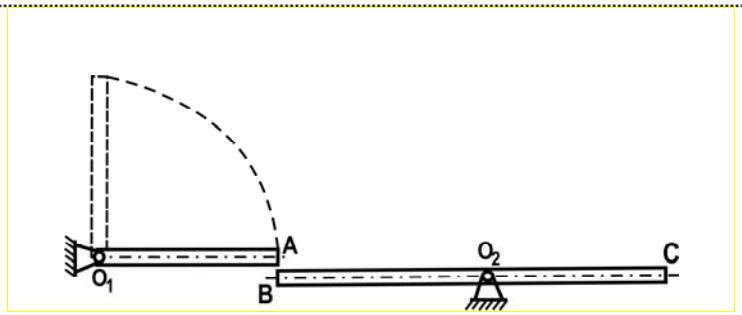


Fig. 3.4.9

Răspunsuri

a) $\omega_1' = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{3g}{\ell}}$, $\omega_2' = \frac{5}{9}\sqrt{\frac{3g}{\ell}}$;

b) $P_1 = \frac{5G}{9}\sqrt{\frac{\ell}{3g}}$, $P_2 = \frac{10G}{9}\sqrt{\frac{\ell}{3g}}$.

3.4.10. Sistemul de două bare omogene din fig. 3.4.10, având greutatea G şi lungimea 2ℓ fiecare, se află în echilibru ca în figură, fiind articulate între ele în A şi bara OA în punctul fix O prin articulații cilindrice fără frecare. La un moment dat, la mijlocul C al barei AB se ciocneşte o bilă de greutate $G/2$, care are la începutul ciocnirii viteza orizontală de valoare $5v_0$, iar la sfârşitul ciocnirii viteza sa are aceeaşi direcție, sensul contrar şi valoarea v_0. Să se determine:

a) vitezele unghiulare ale barelor la sfârşitul ciocnirii;
b) coeficientul de restituire la ciocnire;
c) percuțiile de legătură din articulații în timpul ciocnirii.

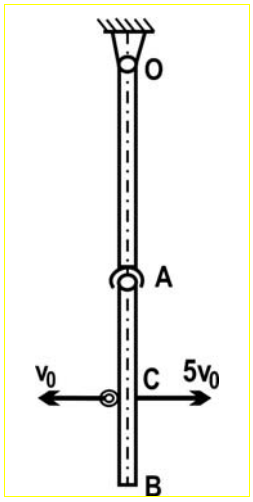


Fig. 3.4.10

Răspunsuri

a) $\omega_1' = \frac{9}{14}\frac{v_0}{\ell}$, $\omega_2' = \frac{9}{7}\frac{v_0}{\ell}$;

b) $R = \frac{5}{7} = 0{,}714$;

c) $P_A = \frac{3}{7}\frac{G}{g}v_0$, $P_O = \frac{3}{14}\frac{G}{g}v_0$.

3.4.11. Sistemul de două bare omogene din fig. 3.4.11, având lungimea ℓ şi masa m fiecare, se află în echilibru ca în figură, fiind articulate între ele în A şi bara OA în punctul fix O prin articulaţii cilindrice fără frecare. La un moment dat, la mijlocul C al barei AB se aplică percuţia dată P orizontală. Să se determine:

a) vitezele unghiulare ale barelor la sfârşitul ciocnirii;

b) percuţiile de legătură din articulaţii în timpul ciocnirii.

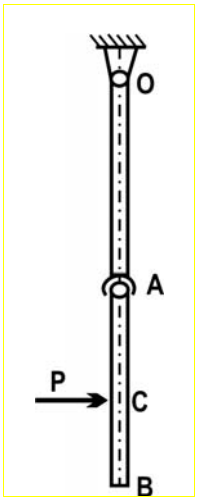


Fig. 3.4.11

Răspunsuri

a) $\omega_1' = \frac{3}{7}\frac{P}{m\ell}$, $\omega_2' = \frac{6}{7}\frac{P}{m\ell}$;

b) $P_A = \frac{P}{7}$, $P_O = \frac{P}{14}$.

3.4.12. Sistemul de două plăci plane omogene din fig. 3.4.12, unde placa dreptunghiulară are lungimea $OA = 2\ell$, lăţimea ℓ şi greutatea 6G, iar cea sub formă de triunghi echilateral ABD are lungimea laturilor 2ℓ şi greutatea 3G, se află în echilibru într-un plan vertical, plăcile fiind articulate între ele în A şi cea dreptunghiulară în O prin articulaţii cilindrice fără frecare. Ştiind că, la un moment dat, se aplică primei plăci percuţia dată P ca în figură, să se determine:

a) vitezele unghiulare ale plăcilor la sfârşitul ciocnirii;

b) percuţiile de legătură din articulaţii în timpul ciocnirii.

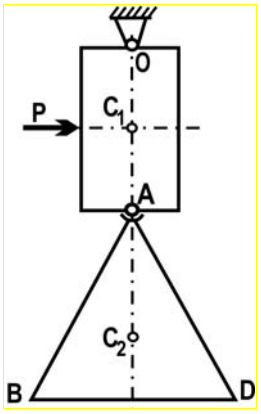


Fig. 3.4.12

Răspunsuri

a) $\omega_1' = \dfrac{10}{109}\dfrac{Pg}{G\ell}$, $\omega_2' = -\dfrac{8\sqrt{3}}{109}\dfrac{Pg}{G\ell}$;

b) $P_A = \dfrac{12}{109}P$, $P_O = \dfrac{37}{109}P$.

3.4.13. Sistemul de două corpuri omogene din fig. 3.4.13, format din discul circular de rază a şi greutate 2G şi din bara AB de lungime 2a şi greutate 3G, se află în echilibru într-un plan vertical, corpurile fiind articulate între ele în A şi discul în punctul fix O prin articulații cilindrice fără frecare. Ştiind că, la un moment dat, se aplică discului percuția dată P ca în figură, să se determine:

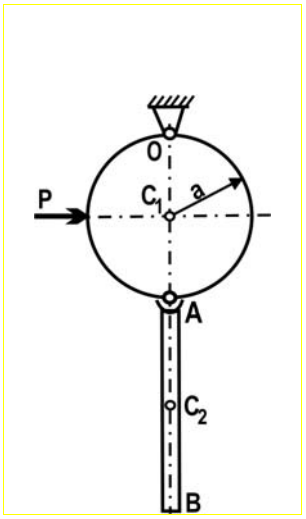


Fig. 3.4.13

a) vitezele unghiulare ale corpurilor la sfârşitul ciocnirii;

b) percuțiile de legătură din articulații în timpul ciocnirii;

c) valoarea percuției P, dacă aceasta apare în timpul ciocnirii discului cu o bilă de greutate G, având viteza la începutul ciocnirii de valoare v_0 şi coeficientul de restituire la ciocnire fiind $R = 3/4$.

Răspunsuri

a) $\omega_1' = \dfrac{1}{6}\dfrac{Pg}{Ga}$, $\omega_2' = -\dfrac{1}{4}\dfrac{Pg}{Ga}$;

b) $P_A = \dfrac{P}{4}$, $P_O = \dfrac{5P}{12}$;

c) $P = \dfrac{3}{2}\dfrac{G}{g}v_0$.

3.4.14. Sistemul de două corpuri omogene din fig. 3.4.14, format din bara OA de lungime 4a şi greutate 3G şi dintr-un disc circular de rază 2a şi greutate 4G, se află în echilibru într-un plan vertical, corpurile fiind articulate între ele în A şi bara în punctul fix O prin articulaţii cilindrice fără frecare. Ştiind că, la un moment dat, se aplică discului o percuţie P ca în figură, sub un unghi α dat faţă de orizontală, să se determine:

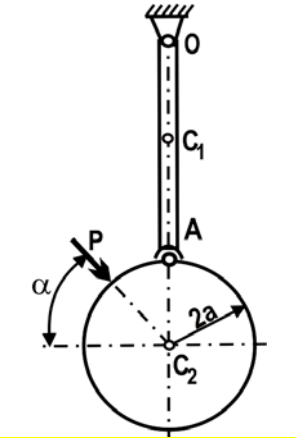


Fig. 3.4.14

a) vitezele unghiulare ale corpurilor la sfârşitul ciocnirii;

b) componentele verticale şi orizontale ale percuţiilor de legătură din articulaţii în timpul ciocnirii.

Răspunsuri

a) $\omega_1' = \omega_2' = \dfrac{Pg\cos\alpha}{28Ga}$;

b) $P_A^o = 2P_O^o = \dfrac{1}{7}P\cos\alpha$, $P_A^v = P_O^v = P\sin\alpha$.

3.5. Mecanică analitică

3.5.1. Se consideră sistemul de 7 corpuri omogene din fig. 3.5.1, pentru care se cunosc greutăţile corpurilor şi razele scripeţilor sau ale tamburilor troliului 1 notate pe figură, precum şi lungimea 3R a barei C_2A, greutatea sa 3G şi momentul $M = 75GR/4$ al cuplului motor aplicat troliului. Ştiind că troliul 1 şi discul circular 2 se rostogolesc fără alunecare pe planele orizontale din figură, iar rigiditatea firelor, frecările din articulaţii, frecările de rostogolire şi frecarea de alunecare a capătului A al barei sunt neglijabile, să se determine:

a) acceleraţiile centrelor de greutate C_1, C_2 şi C_6 ale corpurilor 1, 2, respectiv 6;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valorile minime ale coeficienţilor de frecare μ_1 şi μ_2, pentru a fi îndeplinită condiţia de rostogolire fără alunecare a corpurilor 1, respectiv 2.

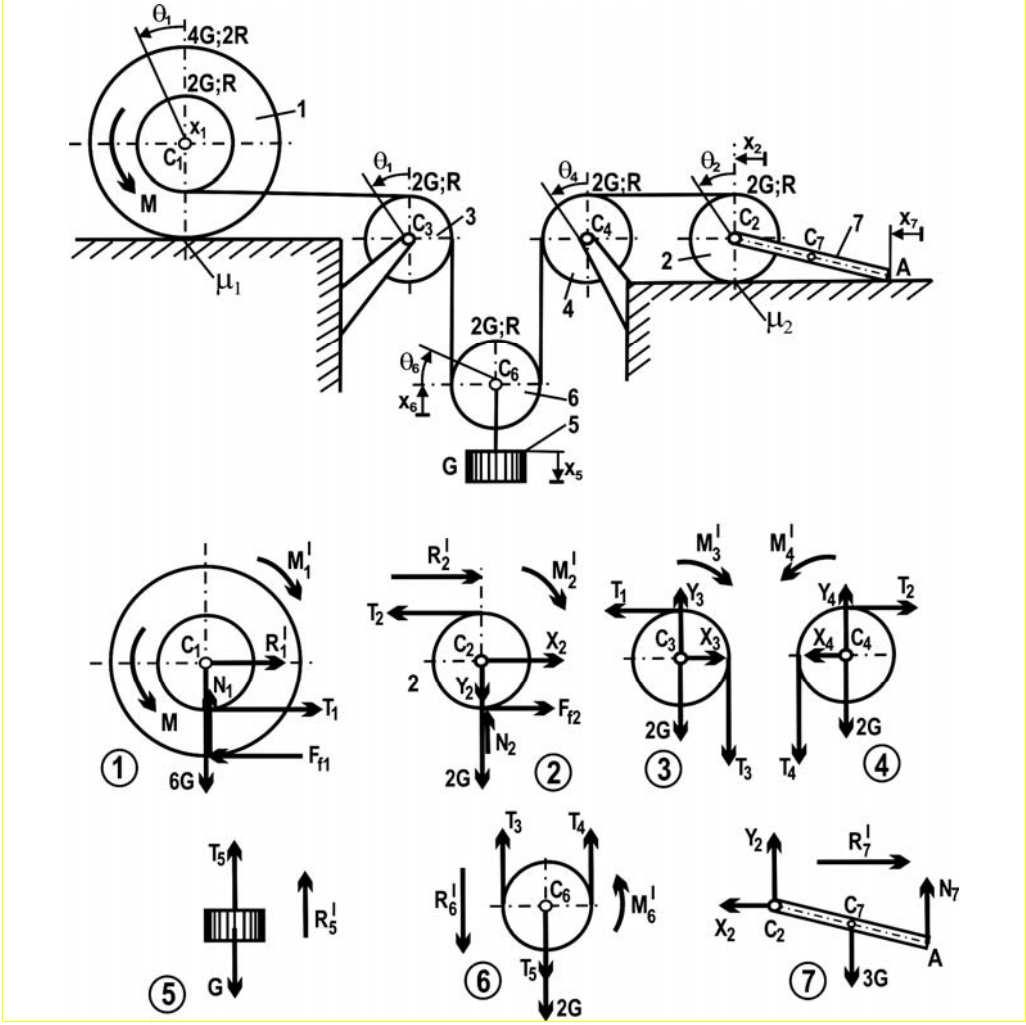


Fig. 3.5.1

Rezolvare

Se observă că sistemul considerat are două grade de libertate. Înainte de a trece efectiv la rezolvarea problemei, este necesar să se stabilească relațiile cinematice, prin care se exprimă parametrii de poziție ai corpurilor în funcție de cei doi parametri de poziție independenți, care se aleg în mod avantajos ca fiind deplasările pe orizontală x_1 şi x_2 ale centrelor de greutate ale corpurilor 1, respectiv 2. Dacă toți parametrii de poziție din fig. 3.5.1 sunt măsurați de la începutul mişcării sistemului, rezultă:

$$\theta_1 = \frac{x_1}{2R}\ , \quad \theta_2 = \frac{x_2}{R}\ , \quad \theta_3 = \frac{x_1}{2R}\ , \quad \theta_4 = \frac{2x_2}{R}\ ,$$
$$x_5 = x_6 = \frac{x_1 - 4x_2}{4}\ , \quad \theta_6 = \frac{x_1 + 4x_2}{4R}\ , \quad x_7 = x_2\ .$$

a) Pentru studiul mişcării sistemelor mecanice supuse la legături olonome, aşa cum este şi sistemul considerat, în cadrul mecanicii analitice se folosesc ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua. Pentru stabilirea lor, în primul rând trebuie să se calculeze energia cinetică a sistemului la un moment oarecare al mişcării sale, care va fi:

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{6G}{g}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2G}{g}\frac{R^2}{2} + \frac{4G}{g}\frac{4R^2}{2}\right)\frac{\dot{x}_1^2}{4R^2} + \frac{1}{2}\frac{2G}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{2G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{\dot{x}_2^2}{R^2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{2G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{\dot{x}_1^2}{4R^2} + \frac{1}{2}\frac{2G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{4\dot{x}_2^2}{R^2} + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{(\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2)^2}{16} + \frac{1}{2}\frac{2G}{g}\frac{(\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2)^2}{16} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{2G}{g}\frac{R^2}{2}\frac{(\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2)^2}{16R^2} + \frac{1}{2}\frac{3G}{g}\dot{x}_2^2 = \frac{G}{g}\left(\frac{35}{8}\dot{x}_1^2 + 7\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\dot{x}_1\dot{x}_2\right)\ ,$$

din care se determină:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} = \frac{G}{g}\left(\frac{35}{4}\dot{x}_1 - \frac{1}{2}\dot{x}_2\right)\ , \quad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2} = \frac{G}{g}\left(-\frac{1}{2}\dot{x}_1 + 14\dot{x}_2\right)\ .$$

În continuare, trebuie să se calculeze lucrul mecanic elementar virtual al forţelor şi momentelor direct aplicate sistemului, având în vedere faptul că forţele de frecare F_{f1} şi F_{f2} nu efectuează lucru mecanic, fiind aplicate în centrele instantanee de rotaţie I_1, respectiv I_2. Ca urmare, se obţine:

$$\delta L^d = M\,\delta\theta_1 - G\,\delta x_5 - 2G\,\delta x_6 = G\left(\frac{69}{8}\delta x_1 + 3\,\delta x_2\right)\ ,$$

din care se determină forţele generalizate:

$$Q_1 = \frac{69}{8}G\ , \quad Q_2 = 3G\ .$$

Cu aceste elemente calculate, ecuaţiile lui Lagrange devin:

$$\frac{G}{g}\left(\frac{35}{4}\ddot{x}_1 - \frac{1}{2}\ddot{x}_2\right) = \frac{69}{8}G\ , \quad \frac{G}{g}\left(-\frac{1}{2}\ddot{x}_1 + 14\ddot{x}_2\right) = 3G\ ,$$

din care rezultă:

$$\ddot{x}_1 = g\ , \quad \ddot{x}_2 = \frac{g}{4}\ , \quad \ddot{x}_6 = \frac{\ddot{x}_1 - 4\ddot{x}_2}{4} = 0\ .$$

b) Pentru determinarea reacțiunilor legăturilor exterioare şi interioare ale unui sistem mecanic, în cadrul mecanicii analitice se aplică principiul deplasărilor virtuale pentru corpuri sau subsisteme de corpuri separate din sistem, luând în considerare şi lucrul mecanic elementar virtual al rezultantei forțelor de inerție şi al momentului lor rezultant pentru fiecare corp în parte. În cazul sistemului considerat, pentru determinarea eforturilor dinamice din fire, se poate începe cu separarea primului corp, pentru care se dau, pe rând, deplasarea virtuală δy_1 de translație rectilinie pe verticală în sus, deplasarea virtuală δx_1 de translație rectilinie pe orizontală şi deplasarea virtuală $\delta\theta_1$ de rotație în jurul centrului de greutate C_1. Aplicând principiul deplasărilor virtuale, se obțin ecuațiile:

$$N_1\delta y_1 - 6G\delta y_1 = 0\ ,\quad \left(F_{f1} - T_1 - R_1^I\right)\delta x_1 = 0\ ,\quad \left(M + RT_1 - 2RF_{f1} - M_1^I\right)\delta\theta_1 = 0\ ,$$

din care se determină:

$$N_1 = 6G\ ,\qquad F_{f1} = \frac{75}{4}G - \frac{21}{2}\frac{G}{g}\ddot{x}_1 = \frac{33}{4}G\ ,\qquad T_1 = \frac{75}{4}G - \frac{33}{2}\frac{G}{g}\ddot{x}_1 = \frac{9}{4}G\ .$$

În continuare, se separă corpurile 3, 5, 6 şi 4, în această ordine, pentru fiecare corp dându-se o singură deplasare virtuală după cum urmează: de rotație cu $\delta\theta_3$, de translație rectilinie pe verticală cu δx_5, de rotație cu $\delta\theta_6$, respectiv de rotație cu $\delta\theta_4$. Prin aplicarea în mod analog a principiului deplasărilor virtuale, se obțin celelalte eforturi dinamice din fire:

$$T_3 = \frac{75}{4}G - 17\frac{G}{g}\ddot{x}_1 = \frac{7}{4}G\ ,\quad T_5 = G + \frac{G}{g}\ddot{x}_5 = G\ ,$$

$$T_4 = T_3 - \frac{G}{4g}\left(\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2\right) = \frac{5}{4}G\ ,\quad T_2 = T_4 - 2\frac{G}{g}\ddot{x}_2 = \frac{3}{4}G\ .$$

c) Forța de frecare F_{f1} şi reacțiunea normală N_1, care acționează asupra troliului datorită legăturii sale pe planul orizontal în condițiile considerate, au fost deja determinate, astfel încât rezultă:

$$\mu_1 \geq \frac{F_{f1}}{N_1} = \frac{11}{8} = 1{,}375\ .$$

Se observă că valoarea minimă a acestui coeficient de frecare este mare şi vor fi necesare măsuri speciale pentru mărirea frecării de alunecare dintre troliu şi reazemul său, cum ar fi practicarea unor zimți pe periferia tamburului său de rază 2R.

Forța de frecare F_{f2}, care împiedică alunecarea discului 2 pe planul orizontal pe care este rezemat, se poate determina dând o deplasare virtuală de translație rectilinie cu δx_2 după direcția orizontală subsistemului format de corpurile 2 şi 7, pentru care se obține:

$$T_2\delta x_2 - F_{f2}\delta x_2 - R_2^I\delta x_2 - R_7^I\delta x_2 = 0 \ , \quad F_{f2} = T_2 - \frac{5G}{g}\ddot{x}_2 = -\frac{G}{2} \ .$$

Pentru a determina reacțiunea normală $N_2 = 2G + Y$, unde componenta verticală Y a reacțiunii articulației interioare C_2, reprezentată în fig. 3.5.1 ca acționând asupra barei, are valoarea $Y = 3G - N_7$, se observă că este necesar să se afle mai întâi valoarea reacțiunii normale N_7 a planului orizontal asupra capătului A al barei. Pentru aceasta, se consideră deplasarea virtuală de rotație a barei cu $\delta\theta_7$ în sens trigonometric în jurul articulației C_2, pentru care se obține ecuația:

$$N_7 \cdot 2\sqrt{2}R\delta\theta_7 + R_7^I \cdot \frac{R}{2}\delta\theta_7 - 3G \cdot \sqrt{2}R\delta\theta_7 = 0 \ ,$$

din care rezultă:

$$N_7 = \frac{3G}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{G}{g}\ddot{x}_2 > 0 \ , \quad N_2 = \frac{7G}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{32}G = 3{,}63G \ ,$$

$$\mu_2 \geq \frac{|F_{f2}|}{N_2} = 0{,}138 \ .$$

Observație. Aplicarea principiului deplasărilor virtuale pentru determinarea reacțiunilor dinamice, aşa cum s-a arătat mai sus, este echivalentă cu aplicarea principiului lui d′Alembert pentru corpuri sau subsisteme de corpuri separate din sistemul mecanic dat.

3.5.2. Se consideră sistemul format dintr-o pană triunghiulară de greutate G, care alunecă fără frecare pe un plan orizontal cu una din catetele sale, precum şi dintr-un corp paralelipipedic de greutate Q, care alunecă fără frecare pe ipotenuza penei, unghiul α dintre ipotenuză şi cateta orizontală fiind cunoscut. Ştiind că sistemul porneşte din repaus din poziția sa în care parametrii de poziție din fig. 3.5.2 au valori nule, să se determine legile de mişcare ale celor două corpuri.

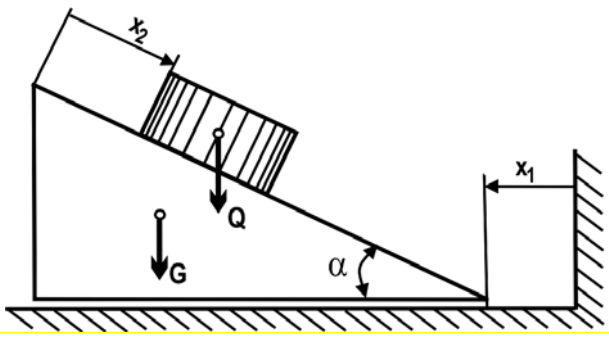


Fig. 3.5.2

Răspunsuri

$$x_1 = \frac{Qg\sin 2\alpha}{4\left(G + Q\sin^2\alpha\right)}t^2 \ , \qquad x_2 = \frac{(G+Q)g\sin\alpha}{2\left(G + Q\sin^2\alpha\right)}t^2 \ .$$

3.5.3. Un disc circular omogen de masă m_1 şi rază r este articulat printr-o articulaţie cilindrică fără frecare în centrul său O de un culisor de masă neglijabilă, care se mişcă fără frecare pe o axă verticală. Pe periferia discului este înfăşurat un fir perfect flexibil şi inextensibil, care este trecut peste un scripete mic ideal şi legat la celălalt capăt de un corp paralelipipedic de masă m_2 aşezat pe un plan orizontal luciu (vezi fig. 3.5.3).

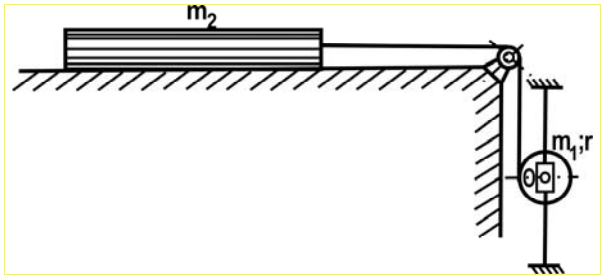


Fig. 3.5.3

Să se determine acceleraţia centrului O al discului, acceleraţia corpului paralelipipedic şi efortul dinamic din fir.

Răspunsuri

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + 3m_2}g \ , \qquad \ddot{x}_2 = \frac{m_1 g}{m_1 + 3m_2} \ ,$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + 3m_2} \ .$$

3.5.4. Două discuri circulare omogene cu centrele O_1 şi O_2, având aceeaşi rază R, dar masele diferite m_1, respectiv m_2, sunt legate între ele ca în fig. 3.5.4 printr-un fir perfect flexibil şi inextensibil trecut peste un scripete mic ideal. Ştiind că primul disc se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal, frecarea de rostogolire fiind neglijabilă, iar centrul O_2 al celui de-al doilea disc se mişcă fără frecare pe o axă fixă verticală, să se determine:

a) acceleraţiile centrelor discurilor;

b) efortul dinamic din fir;

c) valoarea minimă a coeficientului de frecare μ pentru a fi îndeplinită condiția de rostogolire fără alunecare a primului disc.

Răspunsuri

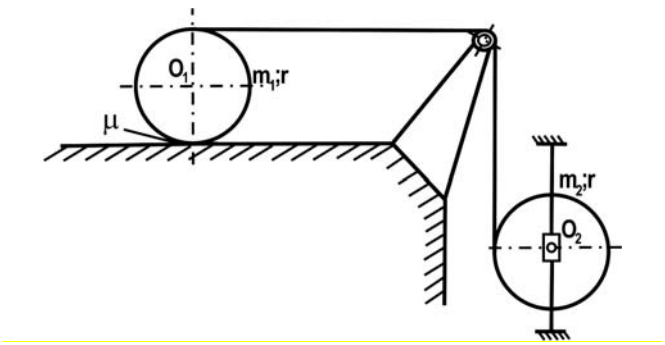


Fig. 3.5.4

a) $\ddot{x}_1 = \dfrac{4m_2 g}{9m_1 + 8m_2}$,

$\ddot{x}_2 = \dfrac{6m_1 + 8m_2}{9m_1 + 8m_2} g$;

b) $T = \dfrac{3m_1 m_2 g}{9m_1 + 8m_2}$;

c) $\mu \geq \dfrac{m_2}{9m_1 + 8m_2}$.

3.5.5. Se consideră sistemul de 7 corpuri omogene din fig. 3.5.5, pentru care se cunosc datele notate pe figură, reprezentând greutățile corpurilor, razele scripeților sau ale tamburilor troliului 1, coeficienții de frecare de alunecare μ şi de rostogolire s cunoscuți, precum şi momentul M al cuplului motor aplicat troliului. Neglijând frecările din articulații şi rigiditatea firelor, știind că troliul 1 şi discul circular 5 se rostogolesc fără alunecare pe două plane orizontale aspre şi că sistemul porneşte din repaus,

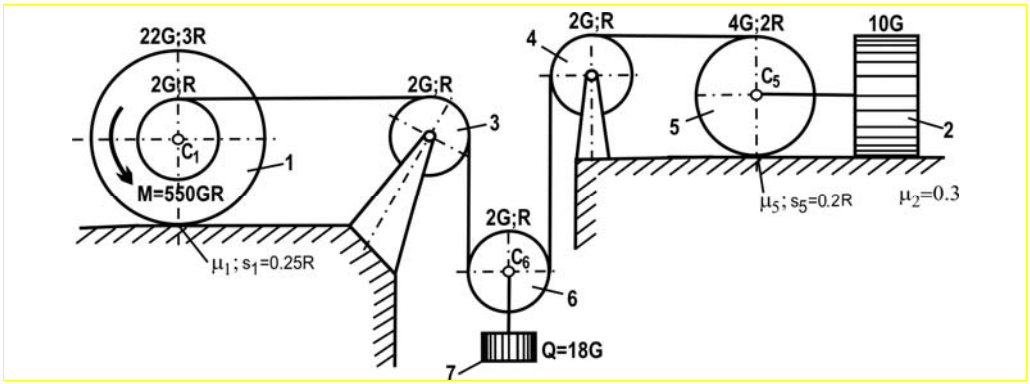


Fig. 3.5.5

să se determine:

a) accelerația centrului de greutate C_1 al troliului, accelerația corpului 2 pe planul orizontal corespunzător şi legea de mişcare a corpului 7 pe verticală în sus;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valorile minime ale coeficienților de frecare μ_1 şi μ_5 pentru a fi îndeplinită condiția de rostogolire fără alunecare a corpurilor 1 şi 5.

Răspunsuri

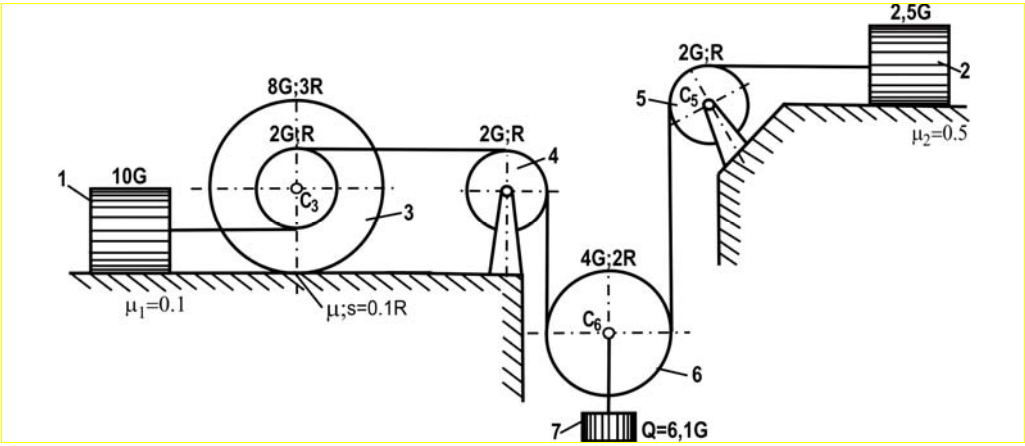
a) $\ddot{x}_1 = 4{,}092g$, $\ddot{x}_2 = 1{,}67g$,

$x_7 = 0{,}529gt^2$;

b) $T_1 = 28{,}25G$, $T_2 = 19{,}7G$, $T_3 = 22{,}8G$, $T_4 = 63{,}34G$,

$T_5 = 60G$, $T_6 = 37G$;

c) $\mu_1 \geq 5{,}27$, $\mu_5 \geq 6{,}625$.



3.5.6. Se consideră sistemul de 7 corpuri omogene din fig. 3.5.6, care porneşte din repaus şi pentru care se cunosc datele notate pe figură, reprezentând greutățile corpurilor sau ale tamburilor troliului 3, razele scripeților, respectiv ale tamburilor troliului, coeficienții de frecare de alunecare μ_1, μ_2 şi de rostogolire s. Neglijând

frecările din articulații şi rigiditatea firelor şi ştiind că troliul se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal aspru, să se determine:

a) acceleraţiile corpurilor 1 şi 2 pe planele orizontale corespunzătoare şi legea de mişcare a corpului 7 pe verticală în jos;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valoarea minimă a coeficientului de frecare μ pentru a fi îndeplinită condiția de rostogolire fără alunecare a troliului.

Răspunsuri

a) $\ddot{x}_1 = 0{,}14g$, $\ddot{x}_2 = 0{,}45g$, $x_7 = 0{,}2175gt^2$;

b) $T_1 = 2{,}4G$, $T_2 = 2{,}375G$, $T_3 = 2{,}465G$,

$T_4 = 2{,}885G$, $T_5 = 2{,}825G$, $T_6 = 3{,}45G$;

c) $\mu \geq 0{,}2035$.

3.5.7. Un troliu omogen, având razele şi greutăţile celor doi tamburi indicate în fig. 3.5.7, este articulat printr-o articulaţie cilindrică fără frecare după axa sa de simetrie în centrul de greutate O_1 al unui bloc paralelipipedic de greutate 3G, care se poate mişca fără frecare între două ghidaje verticale. Pe tamburul de rază R al troliului este înfăşurat un fir perfect flexibil şi inextensibil cu celălalt capăt fixat ca în figură, iar pe tamburul său de rază 2R este înfăşurat un alt fir ideal, având o porţiune verticală şi cealaltă porţiune înfăşurată pe periferia unui disc circular omogen de greutate Q şi rază 2R, al cărui centru O_2 se poate mişca fără frecare pe o axă fixă verticală. Ştiind că sistemul porneşte din repaus, să se determine:

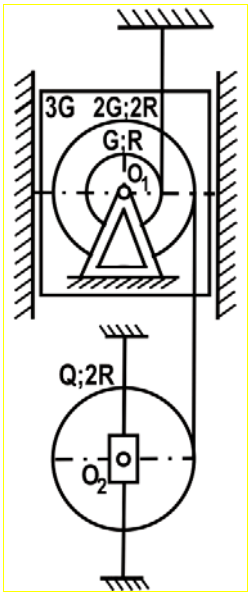


Fig. 3.5.7

a) acceleraţiile centrelor de greutate O_1 şi O_2 ;

b) valorile greutăţii Q pentru care centrul de greutate O_1 al blocului paralelipipedic urcă pe verticală;

c) legile de mişcare ale centrelor O_1 şi O_2 şi eforturile dinamice din fire pentru $Q = 19G$.

Răspunsuri

a) $\ddot{x}_1 = \dfrac{2g(18G - Q)}{63G + 2Q}$, $\ddot{x}_2 = \dfrac{2g(15G + Q)}{63G + 2Q}$;

b) $Q > 18G$;

c) $x_1 = -\frac{gt^2}{101}$, $x_2 = \frac{34gt^2}{101}$; $T_1 = \frac{1245}{101}G = 12{,}327G$,

$T_2 = \frac{627}{101}G = 6{,}2\,G$.

3.5.8. Două discuri circulare omogene, având razele şi greutăţile indicate în fig. 3.5.8, se mişcă într-un plan vertical, astfel încât centrele lor O_1 şi O_2 se mişcă fără frecare pe două axe fixe verticale, discurile fiind legate între ele şi discul cu centrul O_1 de un punct fix prin două fire verticale perfect flexibile şi inextensibile. Ştiind că sistemul porneşte din repaus, să se determine:

a) legile de mişcare ale centrelor O_1 şi O_2 ;

b) eforturile dinamice din fire.

Răspunsuri

a) $x_1 = 0{,}35gt^2$, $x_2 = 0{,}45gt^2$;

b) $T_1 = 0{,}7G$, $T_2 = 0{,}1G$.

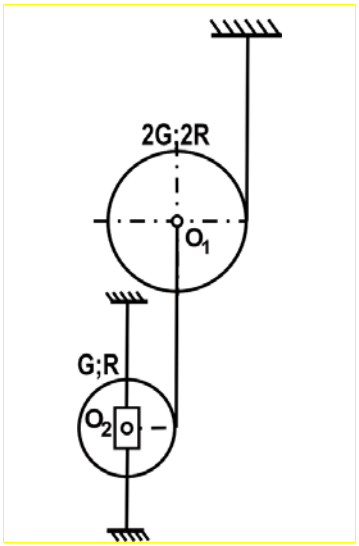


Fig. 3.5.8

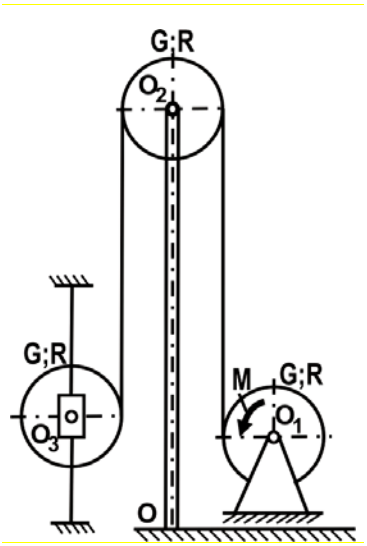


Fig. 3.5.9

3.5.9. Trei scripeți omogeni identici, având raza R şi greutatea G fiecare, sunt legați între ei ca în fig. 3.5.9 prin fire verticale perfect flexibile şi inextensibile. Asupra primului scripete fix cu centrul O_1 acționează un cuplu motor de moment constant M, cel de-al doilea scripete fix este articulat în centrul său O_2 la un capăt al unui stâlp de greutate 8G, care este încastrat la celălalt capăt O în poziție verticală, iar centrul O_3 al celui de-al treilea scripete se mişcă fără frecare pe o axă fixă verticală. Ştiind că sistemul porneşte din repaus şi neglijând frecările din articulații, să se determine:

a) accelerația unghiulară a primului scripete şi accelerația centrului celui de-al treilea scripete pe verticală în jos;

b) valorile momentului M pentru care centrul O_3 se mişcă pe axa verticală în sus;

c) legile de mişcare ale celui de-al treilea scripete, eforturile dinamice din fire şi reacțiunile dinamice ale încastrării O pentru $M = 3GR$.

Răspunsuri

a) $\ddot{\theta}_1 = \dfrac{g(3M - GR)}{4GR^2}$, $\ddot{x}_3 = \dfrac{g(3GR - M)}{4GR}$;

b) $M > 3GR$;

c) $x_3 = 0$, $\theta_3 = \dfrac{gt^2}{R}$, $T_1 = 2G$, $T_2 = G$,

$V_O = 12G$, $H_O = M_O = 0$.

3.5.10. Se consideră sistemul de corpuri omogene din fig. 3.5.10, în care se dau masele corpurilor şi raza R a celor doi scripeți, firele verticale de legătură dintre corpuri fiind perfect flexibile şi inextensibile. Ştiind că sistemul porneşte din repaus şi neglijând frecările, să se determine:

a) accelerația unghiulară a scripetelui fix şi accelerația centrului O_2 al scripetelui mobil pe verticală în jos;

b) legile de mişcare ale scripeților şi eforturile dinamice din fire pentru $m_1 = m_2 = 3m_3 = 3m$.

Răspunsuri

a) $\ddot{\theta}_1 = \dfrac{2g(3m_3 - m_2)}{R(3m_1 + 2m_2 + 6m_3)}$,

$$\ddot{x}_2 = \frac{2g(m_1 + m_2 + m_3)}{R(3m_1 + 2m_2 + 6m_3)} \ ;$$

b) $\theta_1 = 0$, $x_2 = \frac{gt^2}{3}$, $\theta_2 = -\frac{gt^2}{3R}$, $T_1 = T_2 = mg$.

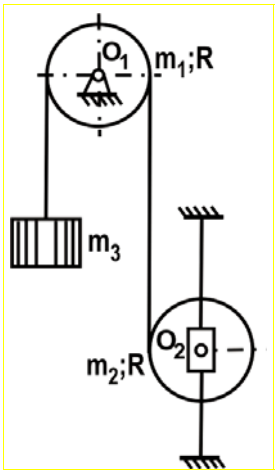


Fig. 3.5.10

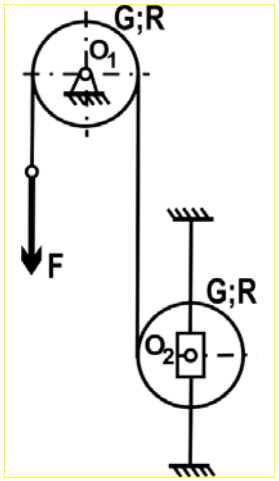


Fig. 3.5.11

3.5.11. Doi scripeți omogeni de aceeaşi greutate G şi aceeaşi rază R sunt legați între ei printr-un fir vertical perfect flexibil şi inextensibil. Centrul O_2 al scripetelui mobil se mişcă fără frecare pe o axă fixă verticală, iar la periferia scripetelui fix, articulat în centrul său O_1 printr-o articulație cilindrică fără frecare, acționează o forță verticală de valoare constantă F, ca în fig. 3.5.11. Ştiind că sistemul porneşte din repaus, să se determine:

a) accelerațiile unghiulare ale scripeților;

b) valorile forței F pentru care scripetele fix se roteşte în sens orar;

c) valorile forței F pentru care scripetele fix se roteşte în sens trigonometric, iar centrul scripetelui mobil coboară pe verticală;

d) valorile forței F pentru care centrul scripetelui mobil urcă pe verticală;

e) legile de mişcare ale scripeților şi efortul dinamic din fir pentru $F = 2G$.

Răspunsuri

a) $\ddot{\theta}_1 = \dfrac{2g(3F-G)}{5GR}$, $\ddot{\theta}_2 = -\dfrac{2g(2F+G)}{5GR}$;

b) $0 \le F < \dfrac{G}{3}$;

c) $\dfrac{G}{3} < F < 2G$;

d) $F > 2G$;

e) $\theta_1 = -\theta_2 = \dfrac{gt^2}{R}$, $x_2 = 0$, $T = G$.

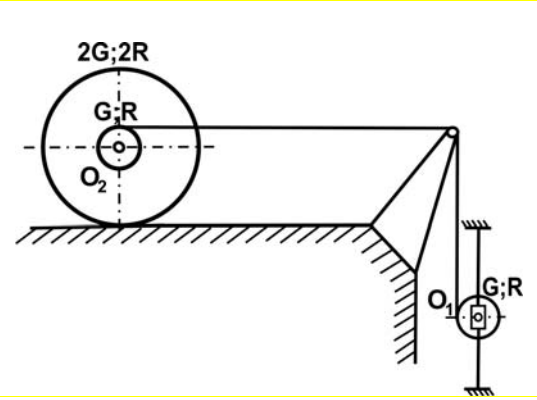


Fig. 3.5.12

3.5.12. Sistemul de două corpuri omogene din fig. 3.5.12 este format dintr-un troliu cu greutăţile şi razele tamburilor notate pe figură, care se rostogoleşte fără alunecare pe un plan orizontal, precum şi dintr-un disc circular cu greutatea şi raza notate, de asemenea, pe figură, al cărui centru O_1 se mişcă fără frecare pe o axă fixă verticală, cele două corpuri fiind legate între ele ca în figură printr-un fir perfect flexibil şi inextensibil trecut peste un scripete mic ideal. Ştiind că sistemul porneşte din repaus şi neglijând frecarea de rostogolire a troliului, să se determine:

a) legile de mişcare ale centrelor de greutate O_1 şi O_2 ale celor două corpuri;

b) efortul dinamic din fir;

c) valoarea minimă a coeficientului de frecare μ dintre troliu şi planul orizontal pentru a fi îndeplinită condiţia de mişcare impusă în enunţ a acestuia.

Răspunsuri

a) $x_1 = \frac{14}{39} g t^2$, $x_2 = \frac{2}{39} g t^2$;

b) $T = \frac{11}{39} G$;

c) $\mu \geq \frac{1}{117}$.

3.5.13. Pentru sistemul de 3 corpuri omogene din fig. 3.5.13 se cunosc masele corpurilor notate pe figură, coeficienţii de frecare de alunecare μ_1 dintre corpul de masă m_1 şi planul orizontal şi μ_2 dintre cele două corpuri paralelipipedice suprapuse, precum şi raza r a discului circular de masă m_3, al cărui centru O se mişcă fără frecare pe o axă fixă verticală. Corpul de masă m_1 şi discul sunt legate între ele ca în figură printr-un fir perfect flexibil şi inextensibil trecut peste un scripete mic ideal. Ştiind că sistemul porneşte din repaus, să se determine:

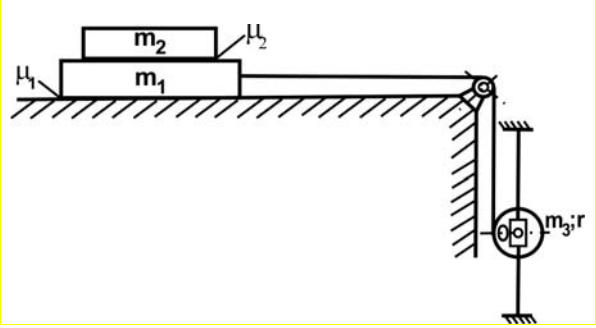


Fig. 3.5.13

a) legile de mişcare ale corpurilor, efortul dinamic din fir şi valoarea minimă a coeficientului de frecare μ_2 pentru care cele două corpuri paralelipipedice nu alunecă unul faţă de celălalt; în acest caz să se precizeze valorile coeficientului de frecare μ_1 pentru care corpul de masă m_1 alunecă pe planul orizontal;

b) acceleraţiile celor două corpuri paralelipipedice şi a centrului discului dacă $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Răspunsuri

a) $x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \frac{m_3 - 3\mu_1(m_1 + m_2)}{m_3 + 3(m_1 + m_2)} g t^2$, $x_3 = \frac{1}{2} \frac{m_3 + (2 - \mu_1)(m_1 + m_2)}{m_3 + 3(m_1 + m_2)} g t^2$,

$$\theta_3 = -\frac{1}{r}\,\frac{(1+\mu_1)(m_1+m_2)}{m_3+3(m_1+m_2)}gt^2\ , \qquad T = \frac{m_3 g(1+\mu_1)(m_1+m_2)}{m_3+3(m_1+m_2)}\ ,$$

$$\mu_2 \geq \frac{m_3 - 3\mu_1(m_1+m_2)}{m_3+3(m_1+m_2)}\ ; \qquad 0 \leq \mu_1 < \frac{m_3}{3(m_1+m_2)}\ ;$$

b) $$\ddot{x}_1 = \frac{m_3 g}{3m_1+m_3}\ , \qquad \ddot{x}_2 = 0\ , \qquad \ddot{x}_3 = \frac{g(2m_1+m_3)}{3m_1+m_3}\ .$$

3.5.14. Pentru sistemul de 3 corpuri omogene din fig. 3.5.14 se cunosc masele corpurilor notate pe figură, coeficientul de frecare de alunecare μ_1 dintre corpul de masă m_1 şi planul orizontal, precum şi raza r a discului circular de masă m_2, care se rostogoleşte fără alunecare pe corpul de masă m_1 în planul vertical al mişcării sistemului. Corpurile de mase m_1 şi m_3 sunt legate între ele printr-un fir perfect flexibil şi inextensibil trecut peste un scripete mic ideal. Ştiind că sistemul porneşte din repaus şi neglijând frecarea de rostogolire a discului, să se determine:

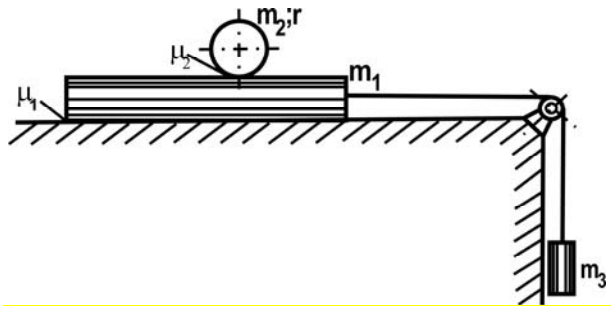


Fig. 3.5.14

a) legile mişcărilor absolute ale corpurilor şi valorile coeficientului de frecare μ_1 pentru care are loc mişcarea sistemului în condiţiile considerate;

b) efortul dinamic din fir;

c) valoarea minimă a coeficientului de frecare μ_2 pentru a fi îndeplinită condiţia de rostogolire fără alunecare a discului;

d) acceleraţia corpului de masă m_1 şi efortul dinamic din fir după ce discul cade pe planul orizontal.

Răspunsuri

a) $x_1 = x_3 = \frac{3}{2}\ \frac{m_3 - \mu_1(m_1 + m_2)}{m_2 + 3(m_1 + m_3)} gt^2$, $x_2 = \frac{1}{2}\ \frac{m_3 - \mu_1(m_1 + m_2)}{m_2 + 3(m_1 + m_3)} gt^2$,

$\theta_2 = \frac{1}{r}\ \frac{m_3 - \mu_1(m_1 + m_2)}{m_2 + 3(m_1 + m_3)} gt^2$, $0 \le \mu_1 < \frac{m_3}{m_1 + m_2}$;

b) $T = \frac{3m_1 + m_2 + 3\mu_1(m_1 + m_2)}{m_2 + 3(m_1 + m_3)} m_3 g$;

c) $\mu_2 \ge \frac{m_3 - \mu_1(m_1 + m_2)}{m_2 + 3(m_1 + m_3)}$;

d) $\ddot{x}_1 = \frac{g(m_3 - \mu_1 m_1)}{m_1 + m_3}$, $T = \frac{m_1 m_3 g(1 + \mu_1)}{m_1 + m_3}$.

4.1. Vibraţii lineare ale sistemelor mecanice cu un singur grad de libertate

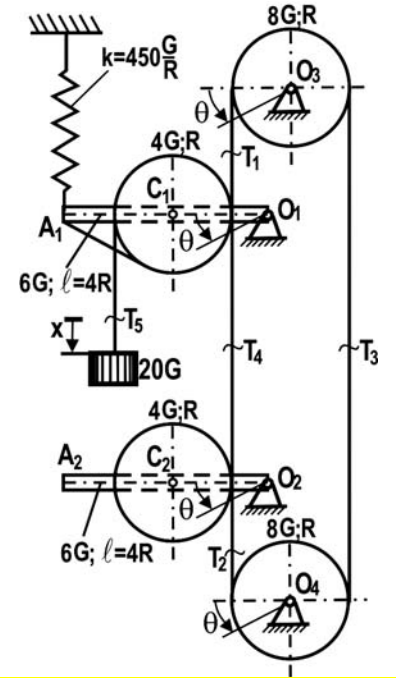


Fig. 4.1.1

4.1.1. Se consideră sistemul mecanic de corpuri omogene din fig. 4.1.1, pentru care datele sunt notate alăturat. Un fir perfect flexibil şi inextensibil este legat la capătul A_1 al barei O_1A_1, apoi este înfăşurat pe periferiile celor 4 scripeţi sub unghiurile la centru $2\pi/3$, π, $\pi, 2\pi$ respectiv 3π, iar la celălalt capăt al firului este atârnat corpul de greutate 20G. Frecările din articulaţii sunt neglijabile, iar parametrul de poziţie θ se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului, în care cele două bare se află în poziţie orizontală. Să se determine:

a) legea de mişcare $\theta = \theta(t)$, ştiind că la momentul iniţial se roteşte bara O_2A_2 în jurul articulaţiei cilindrice O_2 cu unghiul $\theta_0 = 0{,}01\text{rad}$, după care sistemul este lăsat liber;

b) eforturile dinamice din porţiunile firului specificate în figură, ştiind că în poziţia de echilibru static a sistemului eforturile T_1, T_2 şi T_3 au aceeaşi valoare statică $T_0 = 20G$;

c) valoarea minimă a coeficientului de frecare μ dintre fir şi scripeţi pentru ca acesta să nu alunece pe periferia scripeţilor.

Rezolvare

a) Deoarece unghiul θ_0 este foarte mic, având aproximativ valoarea 0,575 grade, rezultă că sistemul considerat va avea mici oscilaţii libere şi neamortizate în jurul poziţiei sale de echilibru static. Din figură se observă că, dacă firul nu alunecă pe

periferia scripeţilor, cei doi scripeţi articulaţi în centrele C_1 şi C_2 ale barelor nu se rotesc faţă de bare şi, în consecinţă, formează corp comun cu acestea. Ca urmare, sistemul dat are un singur grad de libertate, parametrul de poziţie fiind unghiul θ de rotaţie a corpurilor în jurul articulaţiilor fixe, astfel încât pentru stabilirea ecuaţiei diferenţiale a mişcării se poate folosi ecuaţia lui Lagrange de speţa a doua sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial \theta}+\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=0 \ .$$

Pentru calculul energiei cinetice a sistemului se ţine seama de faptul că acesta efectuează mici oscilaţii în jurul poziţiei sale de echilibru şi că se poate considera ca fiind format din corpuri cu axă fixă, la care se adaugă corpul de greutate 20G, aflat în mişcare de translaţie rectilinie pe verticală. Cu datele notate pe figură se obţine:

$$J_1=\frac{6G}{g}\frac{16R^2}{3}+\frac{4G}{g}\frac{R^2}{2}+\frac{4G}{g}(2R)^2=50\frac{G}{g}R^2 \ , \quad J_2=\frac{8G}{g}\frac{R^2}{2}=4\frac{G}{g}R^2 \ ,$$

$$E_c=2\cdot\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+2\cdot\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}\frac{20G}{g}\left(3R\dot{\theta}\right)^2=144\frac{G}{g}R^2\dot{\theta}^2 \ ,$$

de unde se observă că energia cinetică a sistemului, în cazul micilor sale oscilaţii, nu depinde de coordonata generalizată θ.

Notând cu ΔL deformaţia arcului elicoidal până în poziţia de echilibru static a sistemului, energia sa potenţială devine:

$$E_p=\frac{1}{2}k\left(4R\theta+\Delta L\right)^2-20G\cdot 3R\theta-2\cdot 10G\cdot 2R\theta-\frac{1}{2}k\left(\Delta L\right)^2=$$

$$=225\frac{G}{R}\left(4R\theta+\Delta L\right)^2-100GR\theta-225\frac{G}{R}\left(\Delta L\right)^2 \ .$$

Deformaţia statică ΔL a arcului se determină din condiţiile ca atât $E_p(\theta)$ cât şi $\partial E_p/\partial\theta$ să fie nule în poziţia de echilibru static a sistemului, deci pentru $\theta=0$. Prima condiţie este îndeplinită pentru orice ΔL, iar din a doua rezultă:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=450\frac{G}{R}\cdot 4R\left(4R\theta+\Delta L\right)-100GR=7200GR\theta \ , \quad \Delta L=\frac{R}{18} \ .$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării se obţine succesiv:

$$288\frac{G}{R}R^2\ddot{\theta}+7200GR\theta=0 \ , \quad \ddot{\theta}+25\omega_0^2\theta=0 \ ,$$

unde s-a notat $\omega_0^2 = g/R$. Ţinând seama de condiţiile iniţiale date, soluţia ultimei ecuaţii diferenţiale rezultă:

$$\theta = 0{,}01\cos 5\omega_0 t \ \ [\text{rad}] .$$

b) Pentru a determina eforturile dinamice din porţiunile de fir specificate în figură prin secţionare, se separă cele 5 corpuri care rezultă şi pentru fiecare corp în parte se aplică principiul lui d'Alembert. Deoarece nu se cer reacţiunile articulaţiilor, nu se separă cei doi scripeţi mobili articulaţi la mijlocul barelor, iar pentru cele 4 corpuri cu axă fixă se scriu numai ecuaţiile de momente faţă de articulaţiile fixe. Ca urmare, se pot scrie următoarele ecuaţii de echilibru dinamic:

$$450\frac{G}{R}\left(4R\theta + \frac{R}{18}\right)\cdot 4R + T_1\cdot R - T_4\cdot R - T_5\cdot 3R - 10G\cdot 2R + J_1\ddot{\theta} = 0 ,$$

$$T_5 - 20G + 20\frac{G}{g}\cdot 3R\ddot{\theta} = 0 , \quad T_1\cdot R - T_3\cdot R - J_2\ddot{\theta} = 0 ,$$

$$T_2\cdot R - T_3\cdot R + J_2\ddot{\theta} = 0 , \quad T_4\cdot R - T_2\cdot R - 10G\cdot 2R + J_1\ddot{\theta} = 0 ,$$

din care se determină:

$$T_5 = 20G - 60\frac{G}{g}R\ddot{\theta} , \quad T_3 = T_1 - 4\frac{G}{g}R\ddot{\theta} , \quad T_2 = T_1 - 8\frac{G}{g}R\ddot{\theta} ,$$

$$T_4 = T_1 + 7200G\theta + 230\frac{G}{g}R\ddot{\theta} + 20G = T_1 - 58\frac{G}{g}R\ddot{\theta} + 20G .$$

Se observă că ultima din relaţiile de mai sus conduce la aceeaşi ecuaţie diferenţială a mişcării sistemului, din care se poate determina pe o altă cale legea sa de mişcare. De asemenea, se observă că efortul dinamic T_1 nu se poate determina cu ajutorul legilor mecanicii clasice, deoarece atât corpurile cât şi toate legăturile sunt considerate nedeformabile. Cu toate acestea, în acest caz se poate considera că raportul dintre eforturile dinamice T_4 şi T_2 rămâne tot timpul mişcării cel de la echilibrul static al sistemului, care este 2. Din această condiţie rezultă:

$$T_1 - 58\frac{G}{g}R\ddot{\theta} + 20G = 2T_1 - 16\frac{G}{g}R\ddot{\theta} , \quad T_1 = 20G - 42\frac{G}{g}R\ddot{\theta} .$$

Înlocuind în relaţiile găsite $\ddot{\theta} = -25\omega_0^2\theta_0\cos 5\omega_0 t = -0{,}25\frac{g}{R}\cos 5\omega_0 t$, se determină cele 5 eforturi dinamice cerute:

$$T_1 = 20G + 10{,}5G\cos 5\omega_0 t \ , \quad T_2 = 20G + 12{,}5G\cos 5\omega_0 t \ ,$$
$$T_3 = 20G + 11{,}5G\cos 5\omega_0 t \ , \quad T_4 = 40G + 25G\cos 5\omega_0 t \ ,$$
$$T_5 = 20G + 15G\cos 5\omega_0 t \ .$$

Se observă că toate porţiunile de fir sunt întinse tot timpul mişcării sistemului, iar valorile eforturilor statice din aceste porţiuni sunt cele care rezultă din enunţ:

$$T_{10} = T_{20} = T_{30} = T_{50} = T_0 = 20G \ , \quad T_{40} = 2T_0 = 40G \ .$$

c) Firul ar putea să alunece pe periferia scripeţilor numai prin porţiunea sa înfăşurată sub unghiul la centru 2π pe toată periferia scripetelui articulat în C_2 pe bara O_2A_2, sau pin cea înfăşurată sub unghiul 3π pe scripetele articulat în C_1 pe bara O_1A_1. Deoarece, conform ipotezei considerate, raportul T_4/T_2 rămâne constant tot timpul mişcării sistemului, condiţia ca prima din cele două porţiuni ale firului să nu alunece este dată de relaţia lui Euler pentru frecarea firelor, astfel încât avem:

$$\frac{T_4}{T_2} = 2 \le e^{2\pi\mu} \ , \quad \mu \ge \frac{\ln 2}{2\pi} = 0{,}11 \ .$$

Pentru cealaltă porţiune de fir, care poate să alunece, rezultă:

$$\frac{T_{4\max}}{T_{5\max}} = \frac{65G}{35G} = \frac{13}{7} \le e^{3\pi\mu} \ , \quad \mu \ge \frac{\ln\frac{13}{7}}{3\pi} = 0{,}066 \ ,$$
$$\frac{T_{4\min}}{T_{5\min}} = \frac{15G}{5G} = 3 \le e^{3\pi\mu} \ , \quad \mu \ge \frac{\ln 3}{3\pi} = 0{,}12 \ .$$

Ca urmare, valoarea minimă a coeficientului de frecare dintre fir şi scripeţi pentru ca firul să nu alunece pe periferia lor este $\mu_{\min} = 0{,}12$.

4.1.2. Se consideră sistemul mecanic de corpuri omogene din fig. 4.1.2, pentru care datele sunt notate alăturat. Firele se consideră perfect flexibile şi inextensibile, iar frecările sunt neglijabile. Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării sistemului, se imprimă corpului de greutate G viteza iniţială v_0 vertical în jos în poziţia sa de echilibru static, să se determine:

a) legea de mişcare a corpului de greutate G;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valoarea maximă a vitezei iniţiale v_0 pentru ca toate firele să fie întinse tot timpul mişcării sistemului.

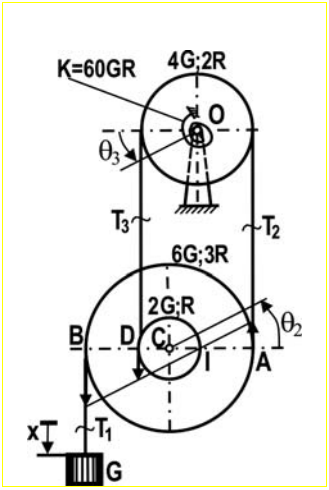


Fig. 4.1.2

Rezolvare

a) Din figură se observă că, deoarece firele sunt perfect flexibile şi inextensibile, troliul mobil are o mişcare de rotaţie instantanee în jurul unei axe orizontale, care este perpendiculară în I pe planul vertical în care are loc mişcarea sistemului. Într-adevăr, dacă în B se desfăşoară pe tamburul de rază 3R al troliului o lungime x de fir, numai în această condiţie se înfăşoară în D şi se desfăşoară în A aceeaşi lungime x/2 de fir. De aici rezultă că, la o deplasare cu x, pe verticală, a corpului de greutate G, troliul şi scripetele fix se rotesc în acest plan vertical în jurul punctelor I, respectiv O, cu unghiurile $\theta_2 = \theta_3 = x/4R$, iar centrul de greutate C al troliului are o deplasare pe verticală egală cu $x/4$. Ca urmare, sistemul considerat are un singur grad de libertate, iar ca parametru de poziţie se ia deplasarea x pe verticală a corpului de greutate G, măsurată din poziţia de echilibru static a sistemului, deoarece se cere legea de mişcare a acestui corp. Pentru stabilirea ecuaţiei diferenţiale a mişcării sistemului se poate folosi ecuaţia lui Lagrange de speţa a doua sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \ .$$

Deoarece sistemul considerat este compus din 3 corpuri, din care unul are o mişcare de translaţie rectilinie, iar celelalte două au mişcări de rotaţie în jurul unei axe fixe sau instantanee, pentru calculul energiei cinetice a sistemului este necesar să se calculeze momentele de inerţie J_2 şi J_3 ale acestor două corpuri faţă de axele lor de rotaţie. Cu datele notate pe figură, acestea devin:

$$J_2 = \frac{2G}{g}\frac{R^2}{2} + \frac{6G}{g}\frac{9R^2}{2} + \frac{8G}{g}R^2 = 36\frac{G}{g}R^2 \ , \qquad J_3 = \frac{4G}{g}\frac{4R^2}{2} = 8\frac{G}{g}R^2 \ ,$$

astfel încât rezultă:

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}^2 + 18\frac{G}{g}R^2\frac{\dot{x}^2}{16R^2} + 4\frac{G}{g}R^2\frac{\dot{x}^2}{16R^2} = \frac{15}{8}\frac{G}{g}\dot{x}^2 \ .$$

Se observă că energia cinetică a sistemului nu depinde de x.

Notând cu $\Delta\theta$ deformaţia unghiulară a arcului spiral până în poziţia de echilibru static a sistemului, energia potenţială devine:

$$E_p = \frac{1}{2}K(\theta_3 + \Delta\theta)^2 - Gx - 8G\frac{x}{4} - \frac{1}{2}K(\Delta\theta)^2 =$$

$$= 30GR\left(\frac{x}{4R} + \Delta\theta\right)^2 - 3Gx - 30GR(\Delta\theta)^2.$$

Deformaţia unghiulară statică $\Delta\theta$ a arcului spiral se poate determina din condiţia $\partial E_p / \partial x = 0$ pentru $x = 0$, deci se obţine:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 60GR\left(\frac{x}{4R} + \Delta\theta\right)\frac{1}{4R} - 3G = \frac{15}{4}\frac{G}{R}x \ , \quad \Delta\theta = \frac{1}{5} = 0{,}2\,\text{rad} = 11{,}5^\circ \ .$$

Ca urmare, ecuaţia diferenţială a mişcării se poate scrie succesiv:

$$\frac{15}{4}\frac{G}{g}\ddot{x} + \frac{15}{4}\frac{G}{g}x = 0 \ , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \ , \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ,$$

unde ω_0 este pulsaţia proprie a sistemului. Ţinând seama de condiţiile iniţiale date, soluţia ultimei ecuaţii diferenţiale rezultă:

$$x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \ .$$

b) Pentru determinarea eforturilor dinamice din fire, se separă corpul de greutate G şi troliul prin secţionarea firelor, iar pentru fiecare corp separat se aplică principiul lui d'Alembert. Deoarece troliul are mişcare plan-paralelă, momentul rezultant al forţelor de inerţie pentru acest corp trebuie calculat faţă de centrul său de greutate C, deci avem nevoie de momentul de inerţie J_2 faţă de axa paralelă cu axa

instantanee de rotaţie ce trece prin C. Acest moment de inerţie se poate calcula direct sau cu formula lui Steiner pentru momente de inerţie axiale:

$$J_2' = \frac{2G}{g}\frac{R^2}{2} + \frac{6G}{g}\frac{9R^2}{2} = J_2 - \frac{8G}{g}R^2 = 28\frac{G}{g}R^2 \ .$$

Astfel se obţin următoarele 3 ecuaţii:

$$T_1 + \frac{G}{g}\ddot{x} - G = 0 \ , \quad T_2 + T_3 - T_1 - 8G + \frac{8G}{g}\frac{\ddot{x}}{4} = 0 \ ,$$
$$T_2 \cdot 3R - T_3 \cdot R + T_1 \cdot 3R - J_2'\ddot{\theta}_2 = 0 \ ,$$

din care se determină:

$$T_1 = G - \frac{G}{g}\ddot{x} = G + \frac{v_0}{R\omega_0}G\sin\omega_0 t,$$
$$T_2 = \frac{3}{2}G + \frac{7}{4}\frac{G}{g}\ddot{x} = \frac{3}{2}G - \frac{7}{4}\frac{v_0}{R\omega_0}G\sin\omega_0 t,$$
$$T_3 = \frac{15}{2}G - \frac{19}{4}\frac{G}{g}\ddot{x} = \frac{15}{2}G + \frac{19}{4}\frac{v_0}{R\omega_0}G\sin\omega_0 t.$$

Dacă se scrie şi ecuaţia de momente faţă de articulaţia fixă O din principiul lui d'Alembert aplicat scripetelui fix, care este separat prin secţionarea firelor, se observă că se poate obţine aceeaşi ecuaţie diferenţială a mişcării sistemului.

c) Valorile minime ale eforturilor dinamice din fire sunt:

$$T_{1\min} = \left(1 - \frac{v_0}{R\omega_0}\right)G \ , \quad T_{2\min} = \left(6 - 7\frac{v_0}{R\omega_0}\right)\frac{G}{4} \ , \quad T_{3\min} = \left(30 - 19\frac{v_0}{R\omega_0}\right)\frac{G}{4} \ ,$$

astfel încât din condiţiile $T_{j\min} \geq 0$, $j = 1, 2, 3,$ rezultă:

$$v_0 \leq R\omega_0 \ , \quad v_0 \leq \frac{6}{7}R\omega_0 \ , \quad v_0 \leq \frac{30}{19}R\omega_0 \ .$$

Ca urmare, valoarea maximă a vitezei iniţiale pentru ca toate firele să fie întinse tot timpul mişcării este:

$$v_{0\max} = \frac{6}{7} R\omega_0 = 0{,}857\sqrt{Rg} \ .$$

4.1.3. Un corp paralelipipedic de greutate G se poate mişca fără frecare între două ghidaje verticale ca în fig. 4.1.3.a. Între centrul de greutate al corpului şi punctele fixe A şi B sunt montate două arcuri elicoidale identice, care au fiecare lungimea ℓ în stare nedeformată. Se cunosc $d = 12b$, $\ell = 13b$ şi se ştie că, sub acţiunea greutăţii sale, corpul se deplasează pe verticală cu distanţa b din poziţia în care arcurile sunt nedeformate până în poziţia sa de echilibru static, notată cu O.

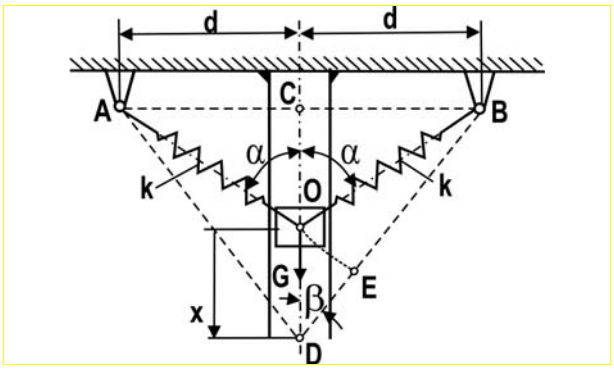


Fig. 4.1.3.a

a) Să se determine constanta elastică k a arcurilor, deformaţia lor $\Delta\ell$ până în poziţia de echilibru static şi unghiul α format de ele cu verticala în poziţia de echilibru static.

b) Să se reprezinte grafic caracteristica elastică a sistemului de arcuri şi să se afle constanta elastică echivalentă k_e în cazul micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru static.

c) Să se determine legea de mişcare a corpului, dacă la momentul iniţial al mişcării acesta se deplasează pe verticală în jos cu distanţa mică $x_0 = 0{,}5b$ din poziţia de echilibru static, după care este lăsat liber.

Rezolvare

a) Notând cu C_0 poziţia centrului de greutate al corpului în care arcurile sunt nedeformate, distanţa CC_0 se poate determina din datele problemei:

$$CC_0 = \sqrt{\ell^2 - d^2} = b\sqrt{169 - 144} = 5b \ ,$$

astfel încât rezultă: $CO = 5b + b = 6b$. Ca urmare, unghiul α format de arcuri cu verticala şi deformaţia lor $\Delta\ell$ la echilibru static devin:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{d}{CO} = \operatorname{arctg}2 \ , \qquad \Delta\ell = \sqrt{d^2 + CO^2} - \ell = \left(6\sqrt{5} - 13\right)b = 0{,}4164b \ .$$

Constanta elastică k se determină succesiv din condiţia de echilibru static:

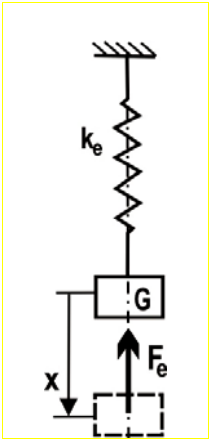


Fig. 4.1.3.b

$$2k\Delta\ell\cos\alpha = G \ ,$$

$$k = \frac{G}{2\Delta\ell\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2\left(6\sqrt{5} - 13\right)}\frac{G}{b} = 5{,}37\frac{G}{2b} = 32{,}22\frac{G}{12b} \ .$$

b) Sistemul de arcuri din fig. 4.1.3.a este echivalent cu un arc nelinear, care va avea constanta elastică echivalentă k_e numai în cazul micilor oscilaţii ale corpului în jurul poziţiei sale de echilibru static. Ca urmare, se poate folosi modelul mecanic din fig. 4.1.3.b, unde este necesar să se determine caracteristica elastică a arcului nelinear. Pentru aceasta, este necesar să se exprime forţa elastică F_e, dirijată după axa Ox, aplicată corpului din partea sistemului de arcuri, în funcţie de deplasarea sa x din poziţia de echilibru static. Ţinând seama de fig. 4.1.3.a şi notând cu $\Delta L = DE$ deformaţia suplimentară corespunzătoare a arcurilor, această forţă elastică (luată cu semn opus) devine:

c)

$$F_e = 2k\Delta L\cos\beta = 32{,}22\frac{G}{6b}(BD - BO)\frac{6b + x}{BD}$$

$$= 32{,}22G\frac{6b + x}{6b}\left(1 - \frac{BO}{BD}\right).$$

Folosind mărimile adimensionale F_e/G şi $\xi = x/6b$, se poate scrie:

$$\frac{F_e}{G} = 32{,}22(1 + \xi)\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4 + (1 + \xi)^2}}\right) \ ,$$

ceea ce reprezintă caracteristica elastică a arcului nelinear, aceeaşi cu a sistemului de arcuri, reprezentată grafic în fig. 4.1.3.c. Din această figură se observă că arcul nelinear se poate considera ca fiind linear numai în cazul micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru static, pentru care trebuie să fie unificate condiţiile: $-0{,}1 \le \xi \le 0{,}1$ sau $-0{,}6b \le x \le 0{,}6b$. În acest caz, deoarece din fig. 4.1.3.a se observă că $\beta \cong \alpha$ şi $\Delta L \cong x\cos\alpha$, se poate scrie:

$$F_e = 2kx\cos^2\alpha \ ,$$

deci constanta elastică echivalentă a arcului nelinear la mici oscilaţii este:

$$k_e = 2k\cos^2\alpha = \frac{32{,}22G}{30b} = 1{,}074\frac{G}{b} \ .$$

Acelaşi rezultat se obţine dacă se dezvoltă caracteristica elastică neliniară $F_e(x)$ în serie de puteri şi se păstrează numai termenul linear $k_e x$ în cazul micilor oscilaţii.

d) Deoarece $x_0 < 0{,}6b$, este îndeplinită condiţia ca să avem mici oscilaţii ale corpului în jurul poziţiei sale de echilibru static. Ca urmare, ecuaţia diferenţială a mişcării se poate scrie succesiv:

$$\frac{G}{g}\ddot{x} + k_e x = 0 \ , \quad \frac{G}{g}\ddot{x} + 1{,}074\frac{G}{b}x = 0 \ , \quad \ddot{x} + 1{,}074\omega_0^2 x = 0 \ , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{b}} \ ,$$

de unde, ţinând seama şi de condiţiile iniţiale date, rezultă legea mişcării:

$$x = x_0\cos\omega_n t = 0{,}5b\cos(1{,}036\,\omega_0 t) \ .$$

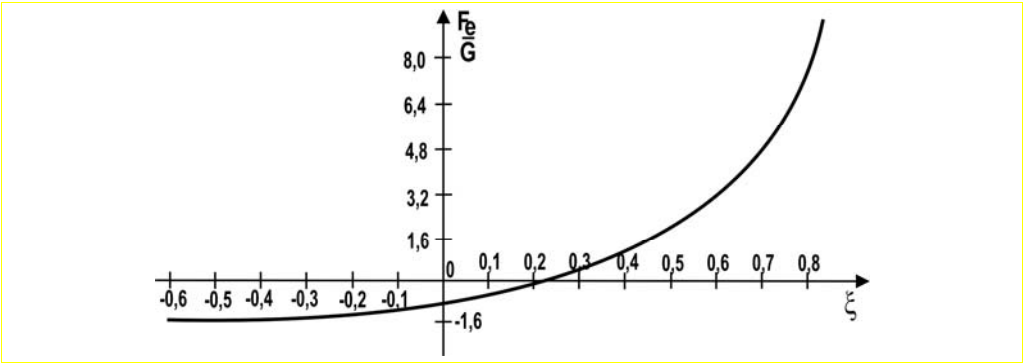


Fig. 4.1.3.c

Observaţia 1. Sistemul de arcuri din această problemă reprezintă o soluţie constructivă frecvent folosită pentru izolarea vibraţiilor, deoarece prezintă 3 avantaje importante faţă de alte soluţii constructive. În primul rând, acest sistem de arcuri are o caracteristică elastică neliniară, ceea ce conduce la evitarea pericolului rezonanţei în cazul vibraţiilor forţate, chiar şi pentru o amortizare vâscoasă neglijabilă. În al doilea

rând, tehnologia de realizare a acestui sistem de arcuri este mult mai simplă decât cea pentru fabricarea altor elemente elastice cu caracteristică neliniară. Al treilea avantaj constă în faptul că se poate micşora foarte uşor constanta elastică echivalentă k_e a sistemului de arcuri la mici oscilaţii prin mărirea distanţei d, prin care creşte unghiul α şi scade $\cos\alpha$. Acest ultim avantaj este foarte important pentru izolarea vibraţiilor, deoarece aşa cum se ştie, pentru o bună izolare a vibraţiilor în regimul normal de funcţionare cu pulsaţia ω a forţei perturbatoare este necesar ca raportul ω/ω_n să fie cât mai mare faţă de $\sqrt{2}$, deci ω_n trebuie să fie cât mai mic.

Observaţia 2. Ecuaţia diferenţială a mişcării corpului pentru oscilaţii mari este:

$$\frac{G}{g}\ddot{x}+32{,}22\frac{G}{6b}(6b+x)\left(1-\frac{6\sqrt{5}b}{\sqrt{144b^2+(6b+x)^2}}\right)=0\ ,$$

care se poate exprima în funcţie de variabila adimensională ξ sub forma:

$$\ddot{\xi}+5{,}37\omega_0^2(1+\xi)\left(1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4+(1+\xi)^2}}\right)=0\ .$$

Se observă că această ecuaţie diferenţială este neliniară şi nu se poate integra complet prin funcţii analitice decât în cazul micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru static. Totuşi, o integrală primă se poate obţine folosind substituţia:

$$\ddot{\xi}=\frac{d\dot{\xi}}{dt}=\frac{d\dot{\xi}}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=\dot{\xi}\frac{d\dot{\xi}}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\dot{\xi}^2}{2}\right)\ ,$$

cu ajutorul căreia rezultă:

$$\frac{\dot{\xi}^2}{2}+5{,}37\omega_0^2\left(\frac{(1+\xi)^2}{2}-\sqrt{5}\sqrt{4+(1+\xi)^2}\right)=$$

$$=5{,}37\omega_0^2\left(\frac{(1+\xi_0)^2}{2}-\sqrt{5}\sqrt{4+(1+\xi_0)^2}\right)\ ,$$

unde $\xi_0=x_0/6b$. Acelaşi rezultat se obţine dacă se aplică teorema de conservare a energiei mecanice, care este valabilă în cazul vibraţiilor libere şi neamortizate pentru orice sistem mecanic. De aici se poate exprima viteza $\dot{x}=6b\dot{\xi}$ ca funcţie de ξ sub forma:

$$\dot{x} = 6b\omega_0\sqrt{5{,}37\left(2+\xi_0+\xi\right)\left(\xi_0-\xi\right)-2\sqrt{5}\left(\sqrt{4+\left(1+\xi_0\right)^2}-\sqrt{4+\left(1+\xi\right)^2}\right)} =$$

$$= 6b\omega_0\sqrt{5{,}37\left(2+\xi_0+\xi\right)\left(\xi_0-\xi\right)\left(1-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4+\left(1+\xi_0\right)^2}+\sqrt{4+\left(1+\xi\right)^2}}\right)}\ ,$$

de unde rezultă că, în orice moment al mişcării, trebuie să fie îndeplinită condiţia $|\xi| \le \xi_0$, deci $|x| \le x_0$.

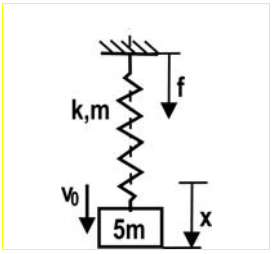


Fig. 4.1.4.a

4.1.4. Elementul elastic al sistemului vibrant din fig. 4.1.4.a este constituit dintr-un arc elicoidal linear de constantă elastică k, dar a cărui masă m nu se poate neglija, având o valoare apropiată de masa corpului atârnat la capătul său liber. Ţinând seama de masa arcului şi ştiind că parametrul de poziţie x se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului, să se determine:

a) legea de mişcare $x = x(t)$, ştiind că la momentul iniţial al mişcării se imprimă corpului viteza iniţială v_0 ca în fig. 4.1.4.a;

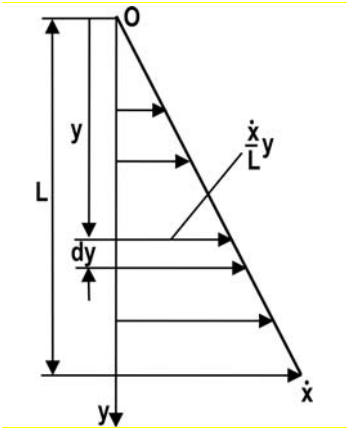


Fig. 4.1.4.b

b) legea vibraţiei forţate a corpului, dacă suportul arcului vibrează pe verticală după legea $f = r\sin\omega t$, unde $\omega = \sqrt{3k/m}$;

c) legea completă de mişcare a corpului, dacă, la începutul vibraţiei suportului după legea dată anterior, acesta se află în repaus în poziţia sa de echilibru static.

Rezolvare

a) Pentru stabilirea ecuaţiei diferenţiale a mişcării în cazul vibraţiilor libere şi neamortizate ale sistemului considerat se poate aplica ecuaţia lui Lagrange de speţa a doua sub forma sa cea mai simplă, corespunzătoare sistemelor mecanice lineare şi conservative cu un singur grad de libertate. Pentru calculul energiei cinetice a sistemului ţinând seama şi de masa arcului, în primul rând trebuie calculată

energia cinetică E_c^a a acestuia. Dacă, la un moment dat al mişcării sistemului, când viteza corpului este $\dot{x}$, lungimea arcului deformat este L, atunci vitezele spirelor arcului se distribuie linear pe lungimea sa, ca în fig. 4.1.4.b. Ca urmare, un element de arc de lungime dy, situat la distanţa y de capătul O fixat al arcului, de masă $dm = (m/L)dy$, va avea viteza $(\dot{x}/L)y$. Astfel se obţine:

$$E_c^a = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\dot{x}^2}{L^2} y^2 dm = \frac{1}{2}\frac{m\dot{x}^2}{L^3}\int_0^L y^2 dy = \frac{1}{6}m\dot{x}^2 \ ,$$

iar energia cinetică a sistemului devine:

$$E_c = E_c^a + \frac{1}{2}5m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3} + 5m\right)\dot{x}^2 = \frac{8}{3}m\dot{x}^2 \ .$$

Pentru calcului energiei potenţiale a sistemului în poziţia sa în care corpul are o deplasare x pe verticală din poziţia de echilibru static, se ţine seama de faptul că la o deformaţie ΔL a arcului, centrul său de greutate se deplasează pe verticală cu distanţa $\Delta L/2$, deci lucrul mecanic al greutăţii sale mg va avea valoarea $mg\Delta L/2$. Ca urmare, notând cu $\Delta\ell$ deformaţia arcului până în poziţia de echilibru static a sistemului, energia sa potenţială devine:

$$E_p = \frac{1}{2}k(x + \Delta\ell)^2 - mg\frac{x}{2} - 5mgx - \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \ .$$

Deformaţia statică $\Delta\ell$ a arcului se determină din condiţia ca, în poziţia de echilibru static a sistemului, energia sa potenţială să fie minimă, astfel încât rezultă:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = k(x + \Delta\ell) - \frac{11}{2}mg = kx \ , \quad \Delta\ell = \frac{11}{2}\frac{mg}{k} \ .$$

Având calculate energia cinetică şi cea potenţială a sistemului, cu ajutorul ecuaţiei lui Lagrange de speţa a doua se obţine ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$\frac{16}{3}m\ddot{x} + kx = 0 \ , \quad \text{sau} \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \ , \quad \text{unde} \quad \omega_n = \frac{\omega_0}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3k}{m}} \ .$$

Impunând condiţiile iniţiale date pentru soluţia generală:

$$x = C_1\cos\omega_n t + C_2\sin\omega_n t \ , \quad \text{sau} \quad x = C_1\cos\frac{\omega_0}{4}t + C_2\sin\frac{\omega_0}{4}t \ ,$$

se determină legea de mişcare cerută:

$$x = \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \ , \qquad \text{sau} \qquad x = 4\frac{v_0}{\omega_0}\sin\frac{\omega_0}{4}t \ .$$

b) Aşa cum s-a arătat la rezolvarea primului punct al problemei, faptul că se ţine seama de masa arcului influenţează numai calculul energiei cinetice a sistemului, pentru care la masa corpului trebuie adăugată o treime din masa arcului. Faptul că greutatea arcului este distribuită pe lungimea sa nu influenţează calculul energiei potenţiale a sistemului, care se mai poate exprima sub forma $E_p = kx^2/2$ cu x măsurat din poziţia de echilibru static, ci numai calculul deformaţiei statice Δl.

Dacă şi capătul O al arcului se deplasează, împreună cu suportul său, pe verticală în jos cu distanţa f, atunci, la o deplasare cu x în acelaşi sens din poziţia de echilibru static a celuilalt capăt al arcului, deformaţia sa va fi $x - f$. Ca urmare, energia cinetică a sistemului rămâne cea calculată la punctul precedent, deoarece $\dot{x}$ este viteza absolută a corpului, dar energia sa potenţială devine: $E_p = k(x-f)^2/2$. Cu aceste mărimi calculate, în acest caz se obţine o nouă ecuaţie diferenţială a mişcării:

$$\frac{16}{3}m\ddot{x} + k(x-f) = 0 \ , \qquad \text{sau} \qquad \frac{16}{3}m\ddot{x} + kx = kr\sin\omega t \ ,$$

care, observând că $\omega = \omega_0$, se mai poate exprima sub forma:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{16}x = \frac{r\omega_0^2}{16}\sin\omega_0 t \qquad (1) \ .$$

Legea vibraţiei forţate a corpului este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale (1), care, aşa cum se ştie, trebuie să fie de forma membrului drept. Ca urmare, impunând condiţia ca $x_p = x_0\sin\omega_o t$ să fie o soluţie particulară a ecuaţiei (1), rezultă:

$$\left(\frac{\omega_0^2}{16} - \omega_0^2\right)x_0 = \frac{\omega_0^2}{16}r \ , \qquad x_0 = -\frac{r}{15} \ , \qquad x_p = \frac{r}{15}\sin(\omega_0 t + \pi) \qquad (2) \ .$$

c) Legea completă de mişcare a corpului este $x = x_p + x_O$, unde x_p este soluţia particulară (2) a ecuaţiei diferenţiale (1), iar x_O este componenta tranzitorie a mişcării, exprimată de soluţia generală a ecuaţiei omogene. Ca urmare, constantele de integrare A şi B din soluţia generală:

$$x = A\cos\frac{\omega_0}{4}t + B\sin\frac{\omega_0}{4}t - \frac{r}{15}\sin\omega_0 t$$

trebuie determinate din noile condiţii iniţiale, care sunt, conform enunţului, condiţii iniţiale nule. Pentru aceasta se calculează viteza:

$$\dot{x} = -\frac{\omega_0}{4}A\sin\frac{\omega_0}{4}t + \frac{\omega_0}{4}B\cos\frac{\omega_0}{4}t - \frac{\omega_0}{15}r\cos\omega_0 t \ ,$$

astfel încât rezultă:

$$A = 0 \ , \quad \frac{\omega_0}{4}B - \frac{\omega_0}{15}r = 0 \ , \quad B = \frac{4}{15}r \ ,$$

deci legea completă de mişcare a corpului este:

$$x = \frac{r}{15}\left(4\sin\frac{\omega_0}{4}t - \sin\omega_0 t\right) \ ,$$

unde $\omega_0 = \omega = \sqrt{3k/m}$.

4.1.5. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.5, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, se imprimă corpului de greutate Q viteza iniţială v_0 pe verticală în jos în poziţia de echilibru static a sistemului, să se determine:

a) legea de mişcare a corpului de greutate Q;
b) eforturile dinamice din fire;
c) valoarea maximă a vitezei iniţiale v_0 pentru ca firele să fie întinse tot timpul mişcării.

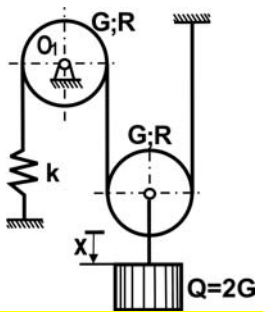


Fig. 4.1.5

Răspunsuri

a) $x = \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \ , \quad \omega_n = 2\sqrt{\frac{2kg}{11G}} \ ;$

b) $T_1 = 2G\left(1 + \frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right) \ ,$

$T_2 = G\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right) \ , \quad T_3 = G\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{4}\frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right) \ ;$

c) $(v_0)_{max} = \frac{6}{7}\frac{g}{\omega_n} = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{11Gg}{2k}}$.

4.1.6. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.6, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, se imprimă corpului de greutate Q viteza iniţială v_0 pe verticală în sus în poziţia de echilibru static a sistemului, să se determine:

a) legea de mişcare a corpului de greutate Q;
b) eforturile dinamice din fire;
c) valoarea maximă a vitezei iniţiale v_0 pentru ca firele să fie întinse tot timpul mişcării.

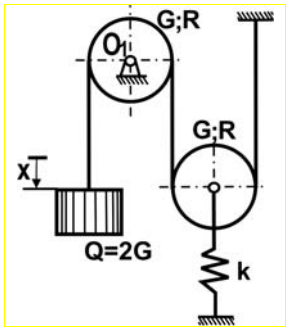


Fig. 4.1.6

Răspunsuri

a) $x = \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$, $\omega_n = 2\sqrt{\frac{2kg}{23G}}$;

b) $T_1 = 2G\left(1 - \frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right)$, $T_2 = 2G\left(1 - \frac{5}{4}\frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right)$,

$T_3 = 2G\left(1 - \frac{21}{16}\frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right)$;

c) $(v_0)_{max} = \frac{16}{21}\frac{g}{\omega_n} = \frac{8}{21}\sqrt{46\frac{Gg}{2k}}$.

4.1.7. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.7, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Troliul mobil se rostogoleşte fără alunecare pe planul orizontal, alunecarea sa fiind împiedicată de un fir ce se înfăşoară sau se desfăşoară pe tamburul său de rază 2R. Neglijând frecările şi ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, sistemul este lăsat liber după ce se deplasează corpul de greutate Q pe verticală în jos cu x_0 din poziţia de echilibru static a sistemului, în care arcul vertical este pretensionat cu T_0, să se determine:

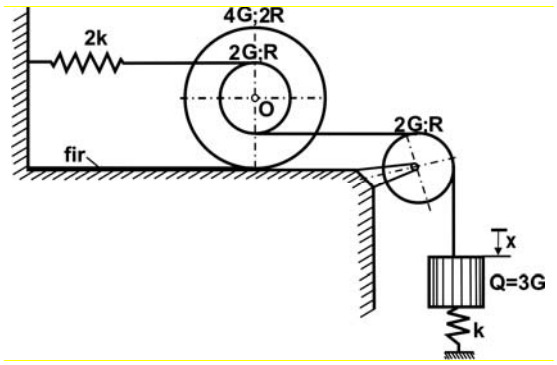


Fig. 4.1.7

a) legea de mişcare a corpului de greutate Q;
b) eforturile dinamice din fire;
c) valoarea minimă a efortului T_0 de pretensionare a arcului vertical pentru ca firele să fie întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

a) $x = x_0 \cos\omega_n t$, $\omega_n = \sqrt{\frac{19}{37}\frac{kg}{G}}$;

b) $T_1 = T_0 + 3G + \frac{20}{37} kx_0 \cos\omega_n t$, $T_2 = T_0 + 3G + \frac{39}{37} kx_0 \cos\omega_n t$,

$T_3 = \frac{2}{3}\left(T_0 + 3G\right) + \frac{45}{37} kx_0 \cos\omega_n t$;

c) $\left(T_0\right)_{min} = 3\left(\frac{45}{74} kx_0 - G\right)$.

4.1.8. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.8, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Troliul mobil se rostogoleşte fără alunecare cu tamburul său de rază R pe o platformă orizontală, alunecarea sa fiind împiedicată de existenţa frecării de alunecare,

caracterizată de coeficientul de frecare μ. Neglijând celelalte frecări şi ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, se imprimă corpului de greutate Q viteza iniţială v_0 pe verticală în jos în poziţia de echilibru static a sistemului, să se determine:

a) legea de mişcare a corpului de greutate Q;
b) eforturile dinamice din fire;
c) valoarea maximă a vitezei iniţiale v_0 pentru ca firele să fie întinse tot timpul mişcării şi valoarea minimă a coeficientului de frecare μ pentru ca troliul să aibă o mişcare de rostogolire fără alunecare.

Răspunsuri

a) $x = \frac{v_0}{\omega_n} \sin\omega_n t$, $\omega_n = \sqrt{\frac{kg}{10G}}$;

b) $T_1 = 2G\left(1+\frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right)$, $T_2 = 2G\left(1+\frac{5}{4}\frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right)$;

c) $(v_0)_{max} = \frac{4g}{5\omega_n} = 8\sqrt{\frac{Gg}{10k}}$, $F_f = 4G\left(1+\frac{19}{8}\frac{v_0\omega_n}{g}\sin\omega_n t\right)$,

$\mu_{min} = \frac{4}{3}+\frac{19}{6}\frac{v_0\omega_n}{g} > 1$.

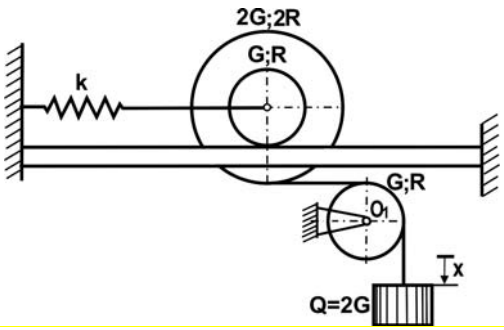


Fig. 4.1.8

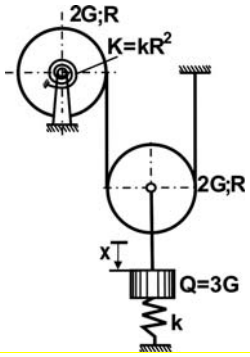


Fig. 4.1.9

4.1.9. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.9, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Neglijând frecările şi ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, sistemul este lăsat liber după ce se deplasează corpul de greutate Q pe verticală în jos cu x_0 din poziţia de echilibru static a sistemului, în care arcul elicoidal este pretensionat cu $T_0 = 3G$, să se determine:

a) legea de mişcare a corpului de greutate Q;
b) eforturile dinamice din fire;
c) valoarea maximă a deplasării iniţiale x_0 pentru ca firele să fie întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

a) $x = x_0\cos\omega_n t$, $\omega_n = \sqrt{\frac{kg}{2G}}$;

b) $T_1 = 6G+\frac{1}{2}kx_0\cos\omega_n t$, $T_2 = 4G+kx_0\cos\omega_n t$,

$T_3 = 4G+\frac{1}{2}kx_0\cos\omega_n t$;

c) $\left(x_0\right)_{max} = \dfrac{4G}{k}$.

4.1.10. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.10, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Neglijând frecările şi ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, sistemul este lăsat liber după ce se deplasează corpul de greutate Q pe verticală în jos cu x_0 din poziţia de echilibru static a sistemului, în care arcul elicoidal este nedeformat, să se determine:

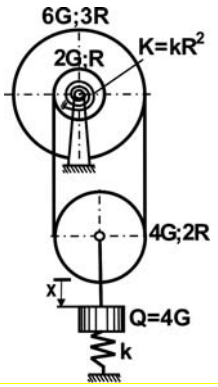


Fig. 4.1.10

a) legea de mişcare a corpului de greutate Q;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valoarea maximă a deplasării iniţiale x_0 pentru ca firele să fie întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

a) $x = x_0 \cos\omega_n t$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{kg}{22G}}$;

b) $T_1 = 4G - \dfrac{9}{11} kx_0 \cos\omega_n t$, $T_2 = 4G - \dfrac{1}{2} kx_0 \cos\omega_n t$,

$T_3 = 4G - \dfrac{3}{22} kx_0 \cos\omega_n t$;

c) $\left(x_0\right)_{max} = \dfrac{44G}{9k}$.

4.1.11. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.11, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Neglijând frecările şi ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, se imprimă scripetelui fix viteza unghiulară iniţială ω_0 ca în figură în poziţia de echilibru static a sistemului, în care arcul elicoidal este nedeformat, să se determine:

a) legea mişcării centrului C al scripetelui mobil;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valoarea maximă pentru ω_0, astfel încât firele să fie întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

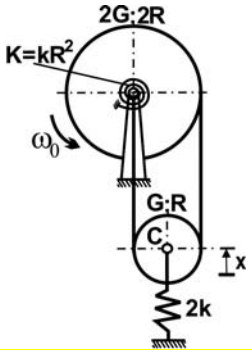


Fig. 4.1.11

a) $x = R\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\ ,\quad \omega_n = \sqrt{\dfrac{6kg}{11G}}\ ;$

b) $T_1 = \dfrac{1}{2}G + \dfrac{19}{22}kR\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\ ,$

$T_2 = \dfrac{1}{2}G + \dfrac{13}{22}kR\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\ ;$

c) $(\omega_0)_{max} = \dfrac{11}{19}\dfrac{G\omega_n}{kR}\ .$

4.1.12 – 15. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.12 - 15, format din 4 corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Neglijând frecările şi ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, se imprimă troliului viteza unghiulară iniţială ω_0 ca în figură în poziţia de echilibru static a sistemului, în care arcul elicoidal este nedeformat, să se determine:

a) legea de mişcare a corpului de greutate Q;

b) eforturile dinamice din fire;

c) valoarea maximă pentru ω_0, astfel încât firele să fie întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

4.1.12.

a) $x = R\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\ ,\quad \omega_n = 2\sqrt{\dfrac{2kg}{71G}}\ ;$

b) $T_1 = 4G + \dfrac{78}{71}kR\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\ ,\quad T_2 = 4G + \dfrac{15}{71}kR\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\ ,$

$T_3 = 4G - \dfrac{1}{71}kR\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\ ,\quad T_4 = 4G - \dfrac{25}{21}kR\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\ ;$

c) $(\omega_0)_{max} = \dfrac{142G}{39kR}\omega_n = \dfrac{1{,}222}{R}\sqrt{\dfrac{Gg}{k}}\ .$

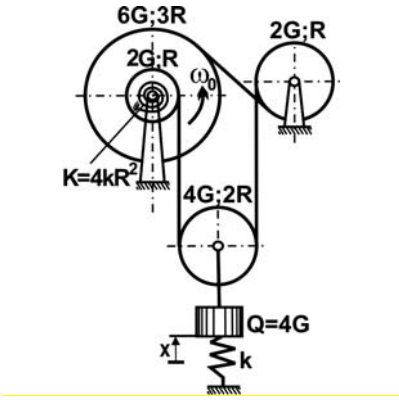


Fig. 4.1.12

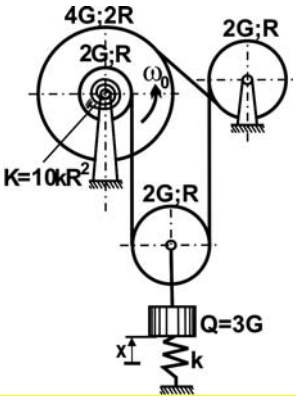


Fig. 4.1.13

4.1.13.

a) $x = \frac{3}{2} R \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$, $\omega_n = \sqrt{\frac{kg}{2G}}$;

b) $T_1 = 3G - \frac{3}{4} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$, $T_2 = \frac{5}{2} G - kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$,

$T_3 = \frac{5}{2} G - \frac{5}{4} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$, $T_4 = \frac{5}{2} G - \frac{9}{4} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$;

c) $(\omega_0)_{max} = \frac{10G}{9kR} \omega_n = \frac{0,786}{R} \sqrt{\frac{Gg}{k}}$.

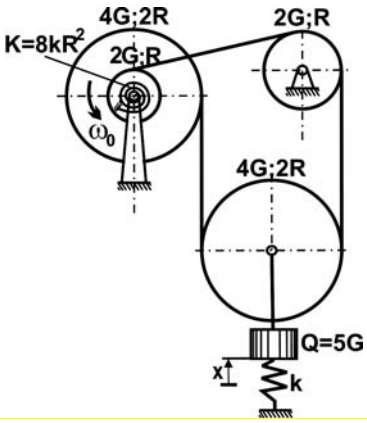


Fig. 4.1.14

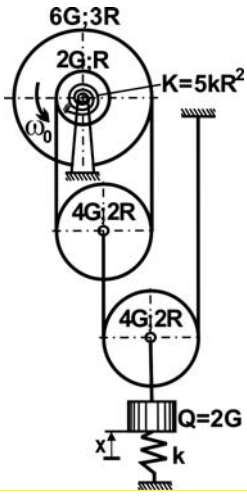


Fig. 4.1.15

4.1.14.

a) $x = \frac{3}{2} R \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{kg}{3G}} \ ;$

b) $T_1 = 5G - kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ , \quad T_2 = \frac{9}{2} G - \frac{5}{3} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ ,$

$T_3 = \frac{9}{2} G - \frac{4}{3} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ , \quad T_4 = \frac{9}{2} G - \frac{5}{3} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ ;$

c) $(\omega_0)_{max} = \frac{2,7G}{kR} \omega_n = \frac{1,56}{R} \sqrt{\frac{Gg}{k}} \ .$

4.1.15.

a) $x = \frac{R}{2} \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ , \quad \omega_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{kg}{2G}} \ ;$

b) $T_1 = 2G + \frac{3}{8} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ , \quad T_2 = 3G \ , \quad T_3 = 3G + \frac{1}{8} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ ,$

$T_4 = \frac{7}{2} G \ , \quad T_5 = \frac{7}{2} G - \frac{1}{2} kR \frac{\omega_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \ ;$

c) $(\omega_0)_{max} = \frac{16G}{3kR} \omega_n = \frac{1,886}{R} \sqrt{\frac{Gg}{k}} \ .$

4.1.16. O placă plană omogenă de masă m este articulată în punctul fix O printr-o articulaţie cilindrică fără frecare, având fusul orizontal. Momentul de inerţie masic al plăcii faţă de axa de rotaţie este J, iar distanţa de la centrul său de greutate C la axa de rotaţie este d. Între fusul articulaţiei şi placă este montat un arc spiral cu constanta elastică la torsiune K, astfel încât, în poziţia de echilibru static a plăcii, unghiul dintre dreapta OC şi verticală este α (fig. 4.1.16). Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, se roteşte placa cu un unghi θ_0 foarte mic din poziţia sa de echilibru static, după care aceasta este lăsată liber, să se determine:

a) ecuaţia diferenţială a micilor oscilaţii ale plăcii în jurul poziţiei sale de echilibru static şi deformaţia statică unghiulară θ_{st} a arcului spiral;

b) pulsaţia proprie şi legea de mişcare a plăcii;

c) pulsaţia proprie în cazurile particulare $\alpha = 0$ şi $\alpha = \pi/2$.

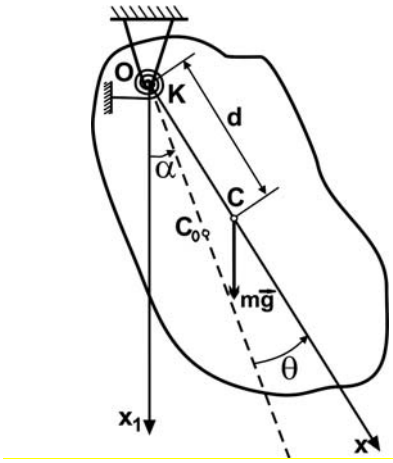


Fig. 4.1.16

Răspunsuri

a) $J\ddot{\theta} + (K + mgd\cos\alpha)\cdot\theta = 0$,

$\theta_{st} = -\dfrac{mgd\sin\alpha}{K}$;

b) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K + mgd\cos\alpha}{J}}$,

$\theta = \theta_0 \cos\omega_n t$;

c) $\alpha = 0$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K + mgd}{J}}$;

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{J}}$.

4.1.17. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.17, format din două corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Se neglijează frecarea în articulaţia cilindrică O $(AO = OC = R)$ şi se consideră că sistemul efectuează mici oscilaţii în jurul poziţiei sale de echilibru static, în care bara este orizontală şi arcurile elicoidale sunt nedeformate. Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, în poziţia de echilibru static a sistemului se imprimă barei viteza unghiulară iniţială foarte mică ω_0 ca în figură, să se determine:

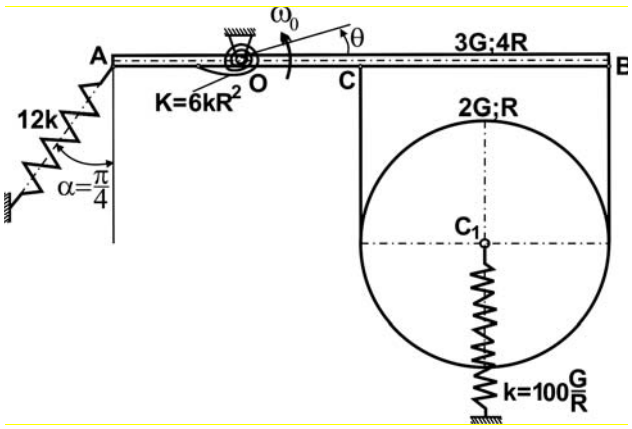


Fig. 4.1.17

a) ecuaţia diferenţială a micilor oscilaţii ale sistemului şi deformaţia statică unghiulară θ_{st} a arcului spiral;

b) legea de mişcare $\theta = \theta(t)$ şi valorile vitezei unghiulare iniţiale ω_0 pentru care sistemul are oscilaţii foarte

mici (amplitudinea $\theta_0 \le |\theta_{st}|/2$);

c) eforturile dinamice din fire şi să se verifice că acestea sunt întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

a) $16\dfrac{G}{g}R^2\ddot{\theta}+1600GR\theta=0$, $\theta_{st}=-\dfrac{7GR}{600GR}=-0{,}012\text{rad}=-0{,}7°$;

b) $\theta=\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$, $\omega_n=10\sqrt{\dfrac{g}{R}}$, $\omega_0\le 0{,}006\omega_n=0{,}06\sqrt{\dfrac{g}{R}}$;

c) $T_1=G\left(1-50\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$, $T_2=G\left(1-150\dfrac{\omega_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$,

$T_{2\min}=G\left(1-150\dfrac{\omega_{0\max}}{\omega_n}\right)=(1-0{,}9)G=0{,}1G>0$.

4.1.18. Se consideră sistemul vibrant din fig. 4.1.18.a, format din 3 corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Se neglijează frecarea din articulaţia scripetelui fix şi cea de rostogolire a troliului, dar frecarea de alunecare a tamburului de rază 2R al troliului pe

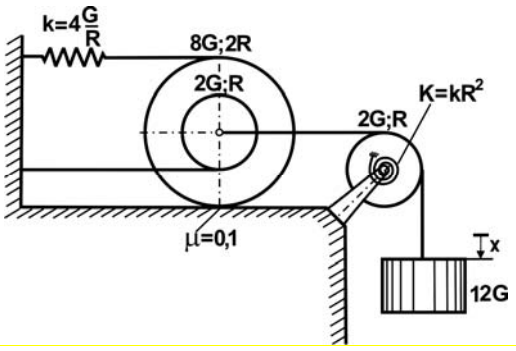


Fig. 4.1.18.a)

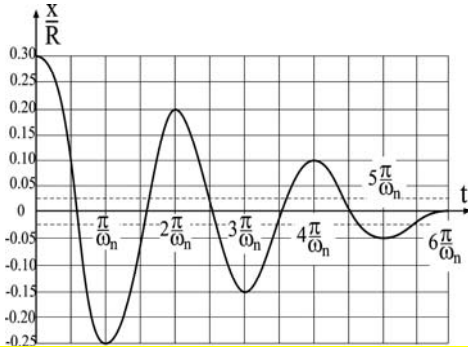


Fig. 4.1.18.b)

planul orizontal nu este neglijabilă. Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, sistemul este lăsat liber după ce se deplasează corpul de greutate 12G pe verticală în jos cu $x_0=0{,}3R$ din poziţia de echilibru static, în care arcul spiral este nedeformat, să se determine:

a) ecuaţia diferenţială a mişcării sistemului, pulsaţia sa proprie pentru vibraţiile sale fără amortizare, deformaţia statică $\Delta\ell$ a arcului elicoidal până la echilibrul static şi deplasarea corespunzătoare y_{st} a corpului de greutate 12G;

b) diagrama mişcării corpului de greutate 12G şi numărul n de semioscilaţii până la oprire;

c) eforturile dinamice din fire şi să se verifice că acestea sunt întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

a) $\ddot{x}+\omega_n^2 x=-\dfrac{R}{40}\omega_n^2 \operatorname{sign}\dot{x}$, $\omega_n=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$, $\Delta\ell=R$, $y_{st}=\dfrac{R}{3}$;

b) diagrama mişcării este reprezentată în fig. 4.1.18.b; $n=6$;

c) $T_1=12G+12\dfrac{G}{R}x_{0j}\cos\omega_n t$, $T_2=12G+0{,}1G(-1)^j+9\dfrac{G}{R}x_{0j}\cos\omega_n t$,

$T_3=8G+1{,}41G(-1)^j+7\dfrac{G}{R}x_{0j}\cos\omega_n t$, $j=1,\ldots,6$;

se observă că toate eforturile sunt pozitive, chiar şi în prima semioscilaţie, în care $x_{01}=0{,}275R$.

4.1.19. Se consideră sistemul vibrant din fig.4.1.19, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Se neglijează frecările şi se ştie că în poziţia de echilibru static a sistemului toate eforturile din fire au aceeaşi valoare statică T_0 = 6G. La un moment dat suportul inferior al arcului elicoidal începe să vibreze pe verticală după legea $f=r\sin\omega_0 t$, unde $\omega_0=\sqrt{g/R}$. Să se determine:

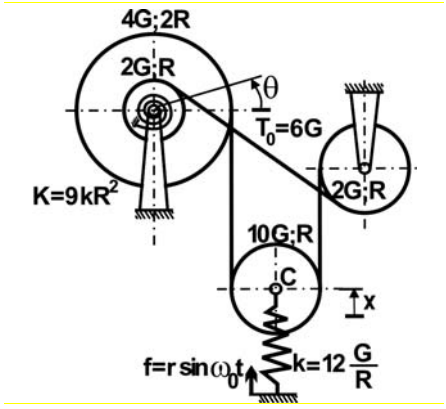


Fig. 4.1.19

a) ecuaţia diferenţială a mişcării sistemului, pulsaţia sa proprie şi deformaţiile statice Δx şi $\Delta\theta$ ale celor 2 arcuri;

b) legea de mişcare x = x(t) corespunzătoare vibraţiei forţate a centrului C al scripetelui mobil;

c) eforturile dinamice din fire şi valoarea maximă a amplitudinii r pentru ca acestea să fie întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

a) $15\dfrac{G}{g}\ddot{x}+60\dfrac{G}{R}x=12G\dfrac{r}{R}\sin\omega_0 t\,,\ \omega_n=2\sqrt{\dfrac{g}{R}}=2\omega_0\,,$

$\Delta x=\dfrac{R}{6}\,,\ \Delta\theta=-\dfrac{1}{6}\text{rad}=-9{,}55^o\,;$

b) $x=\dfrac{4r}{15}\sin\omega_0 t\ ;$

c) $T_1=6G+\dfrac{2}{45}G\dfrac{r}{R}\sin\omega_0 t\,,\ T_2=6G+\dfrac{22}{45}G\dfrac{r}{R}\sin\omega_0 t\,,$

$T_3=6G+\dfrac{14}{45}G\dfrac{r}{R}\sin\omega_0 t\,;\ \ r_{max}=\dfrac{135}{11}R\cong 12R\,.$

4.1.20. Se consideră sistemul vibrant din fig.4.1.20, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Se neglijează frecările şi se ştie că, în poziția de echilibru static a sistemului, în care bara OD este fixată în poziție orizontală şi bara AB articulată în acelaşi punct fix O (AO = OC = R), se află în poziție verticală, eforturile din fire au aceeaşi valoare statică $T_0 = 2G$. Între cele două bare este montat un arc spiral de constantă elastică la torsiune K. La un moment dat bara OD începe să vibreze după legea $\varphi=\varphi_0\sin 2\omega_0 t$, unde $\omega_0=\sqrt{g/R}$. Să se determine:

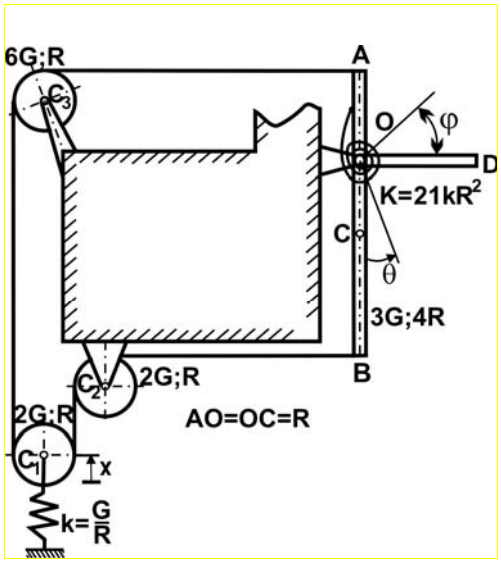


Fig. 4.1.20

a) ecuația diferențială a micilor oscilații forțate ale sistemului, pulsația sa proprie şi deformațiile statice θ_{st} şi x_{st} ale celor două arcuri;

b) legile de mişcare $\theta = \theta(t)$ şi $x = x(t)$ corespunzătoare vibrației forțate a barei AB, respectiv a centrului C_1 al

scripetelui mobil, precum şi valoarea amplitudinii φ_0 pentru ca bara AB să efectueze mici oscilaţii de rotaţie cu amplitudinea $\theta_0 = \pi/72$;

c) eforturile dinamice din fire şi să se verifice dacă ele sunt întinse tot timpul mişcării.

Răspunsuri

a) $25\dfrac{G}{g}R^2\ddot{\theta} + 25GR\theta = 21GR\varphi_0 \sin 2\omega_0 t$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{g}{R}} = \omega_0$,

$\theta_{st} = -\dfrac{4}{21}\text{rad} = 11^o$, $x_{st} = 2R$.

b) $\theta = \dfrac{7}{25}\varphi_0 \sin(2\omega_0 t + \pi)$, $x = \dfrac{7R}{25}\varphi_0 \sin(2\omega_0 t + \pi)$,

$\varphi_0 = \dfrac{25\pi}{504} = 0{,}156\,\text{rad} = 9^o$;

c) $T_1 = G(2 - 3{,}5\varphi_0 \sin 2\omega_0 t)$, $T_2 = G(2 + 5{,}46\varphi_0 \sin 2\omega_0 t)$,

$T_3 = G(2 + 2{,}1\varphi_0 \sin 2\omega_0 t)$, $T_4 = G(2 - 0{,}14\varphi_0 \sin 2\omega_0 t)$,

$T_{1\min} = 1{,}454\,G > 0$, $T_{2\min} = 1{,}15\,G > 0$,

$T_{3\min} = 1{,}67\,G > 0$, $T_{4\min} = 1{,}978\,G > 0$.

4.1.21. Sistemul vibrant din fig.4.1.21, pentru care datele sunt notate alăturat, este format din 2 bare omogene identice, fiecare de greutate 3G şi lungime 4ℓ, articulate la mijloacele lor în punctele fixe O_1 şi O_2 prin articulaţii cilindrice fără frecare. Se cunosc $A_1D_1 = A_2D_2 = E_1B_1 = E_2B_2 = \ell$ şi se ştie că în poziţia de echilibru static a sistemului, în care barele sunt orizontale, arcul elicoidal cu

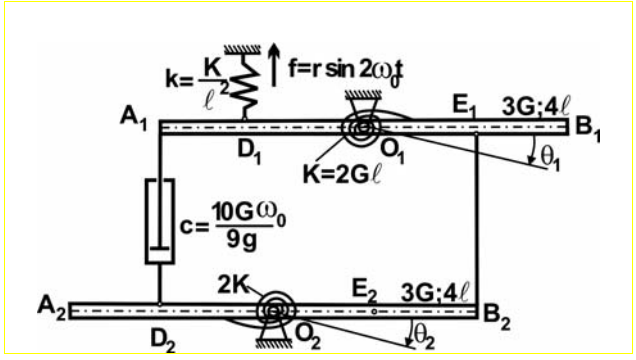


Fig. 4.1.21

suportul fixat este nedeformat şi efortul din firul inextensibil are valoarea statică $T_0 = 4G$. La un moment dat suportul arcului elicoidal începe să vibreze pe verticală după legea $f = r\sin 2\omega_0 t$, unde $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

Să se determine:

a) ecuaţia diferenţială a micilor oscilaţii ale sistemului în jurul poziţiei sale de echilibru static, pulsaţia sa proprie fără amortizare, factorul de amortizare la torsiune şi deformaţiile statice unghiulare ale arcurilor spirale ;

b) legile mişcărilor corespunzătoare vibraţiilor forţate ale barelor şi valoarea amplitudinii r a vibraţiei suportului pentru ca amplitudinea vibraţiei forţate a barei A_1B_1 să fie $\theta_0 = \pi/36$;

c) efortul dinamic din fir.

Răspunsuri

a) $5\dfrac{G}{g}\ell^2\ddot{\theta}_1 + \dfrac{5}{2}\dfrac{G}{g}\omega_0\ell^2\dot{\theta}_1 + 5G\ell\theta_1 = 2Gr\sin 2\omega_0 t$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}} = \omega_0$,

$\varepsilon = \dfrac{\omega_0}{4}$, $\theta_{1st} = 2\,\text{rad}$, $\theta_{2st} = -2\,\text{rad}$;

b) $\theta_1 = \dfrac{\sqrt{10}}{25}\dfrac{r}{\ell}\sin(2\omega_0 t - \psi)$, $\theta_2 = \dfrac{\sqrt{10}}{50}\dfrac{r}{\ell}\sin(2\omega_0 t - \psi)$,

$\psi = \text{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \pi - \text{arctg}\dfrac{1}{3} > \dfrac{\pi}{2}$; $r = \dfrac{5\sqrt{10}\pi}{72}\ell = 0{,}7\ell$;

c) $T = 4G + \dfrac{\pi G}{36}\left(\dfrac{5}{3}\cos(2\omega_0 t - \psi) + 3\sin(2\omega_0 t - \psi)\right)$.

4.2. Vibraţii lineare ale sistemelor mecanice cu mai multe grade de libertate

4.2.1. Se consideră sistemul vibrant din fig.4.2.1, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care datele sunt notate alăturat. Se neglijează frecările în articulaţii, iar partametrii de poziţie x_1 şi x_2 se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului, x_2 fiind deplasarea pe verticală a centrului de greutate C al scripetelui mobil. Ştiind că, la momentul iniţial al mişcării, în poziţia de echilibru static a sistemului se imprimă corpului de masă m viteza iniţială $v_0 = R\sqrt{\frac{k}{m}}$ pe verticală în jos, să se determine:

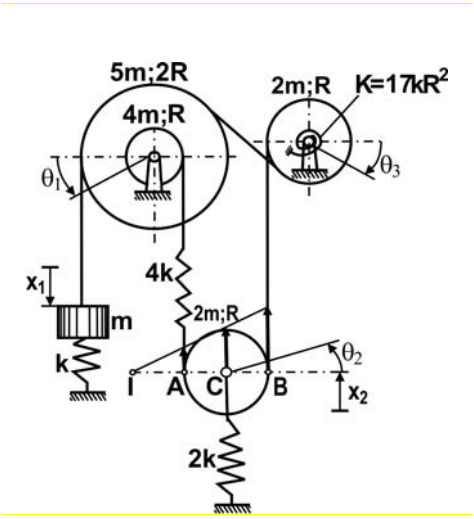


Fig. 4.2.1

a) energia cinetică a sistemului, energia sa potenţială şi ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sub formă matriceală;

b) pulsaţiile proprii, vectorii proprii normaţi şi matricea modală normată;

c) legile de mişcare $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ şi forma lor matriceală.

Rezolvare

a) Din fig.4.2.1 se observă imediat relaţiile cinematice:

$$\theta_1 = \frac{x_1}{2R}, \quad \theta_3 = 2\theta_1 = \frac{x_1}{R},$$

$$\theta_2 = \frac{x_A}{IA} = \frac{x_2}{IC} = \frac{x_1}{IB} = \frac{x_1 - x_2}{R},$$

din care rezultă:

$$IC = \frac{Rx_2}{x_1 - x_2}, \quad IA = IC - R = R\frac{2x_2 - x_1}{x_1 - x_2}, \quad x_A = 2x_2 - x_1 .$$

Cu ajutorul acestor relaţii se pot calcula energia cinetică a sistemului şi energia sa potenţială:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4mR^2}{2} + \frac{20mR^2}{2}\right)\frac{\dot{x}_1^2}{4R^2} + \frac{1}{2}\frac{2mR^2}{2}\frac{\dot{x}_1^2}{R^2} + \frac{1}{2}2m\dot{x}_2^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{2mR^2}{2}\frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{R^2} = \frac{5}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 ,$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}4k(R\theta_1 - x_A)^2 + \frac{1}{2}2kx_2^2 + \frac{1}{2}17kR^2\theta_3^2 =$$

$$= 9kx_1^2 + kx_2^2 + \frac{1}{2}k(3x_1 - 4x_2)^2$$

Folosind ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua pentru sisteme lineare şi conservative, se obţin ecuaţiile diferenţiale ale mişcării:

$$6m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 + 27kx_1 - 12kx_2 = 0 ,$$
$$-m\ddot{x}_1 + 3m\ddot{x}_2 - 12kx_1 + 18kx_2 = 0 ,$$

care, cu notaţia $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, se pot exprima sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix} 27 & -12 \\ -12 & 18 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

b) Ştiind că această ecuaţie diferenţială matriceală are soluţii armonice de forma $\{x\} = \{\mu\}\cos(pt + \varphi)$, unde $\{\mu\}$ este un vector propriu normat, se ajunge la ecuaţia matriceală:

$$\begin{bmatrix} 27\omega_0^2 - 6p^2 & -(12\omega_0^2 - p^2) \\ -(12\omega_0^2 - p^2) & 18\omega_0^2 - 3p^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

Pentru a avea soluţii diferite de soluţia banală, determinantul acestui sistem de 2 ecuaţii lineare şi omogene trebuie să fie nul, astfel încât se obţine ecuaţia caracteristică:

$$17p^4 - 165\omega_0^2 p^2 + 342\omega_0^4 = 0 \ ,$$

din care se determină cele două pulsaţii proprii:

$$p_1 = \sqrt{3}\,\omega_0 = 1{,}732\,\omega_0 \quad , \quad p_2 = \sqrt{\frac{114}{17}}\,\omega_0 = 2{,}59\,\omega_0 \ .$$

Deoarece, pentru fiecare din cele două pulsaţii proprii, cele două ecuaţii algebrice sunt linear dependente, iar vectorii proprii trebuie să fie normaţi, se consideră $\mu_{1r} = 1$ pentru $r = 1$ şi $r = 2$, iar μ_{2r} rezultă din relaţiile:

$$\mu_{2r} = \frac{27\,\omega_0^2 - 6\,p_r^2}{12\,\omega_0^2 - p_r^2} = \frac{12\,\omega_0^2 - p_r^2}{18\,\omega_0^2 - 3p_r^2} \ .$$

Se obţin $\mu_{1r} = 1$ şi $\mu_{2r} = -5/2$, deci cei doi vectori proprii normaţi şi matricea modală normată corespunzătoare devin:

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}5 \end{Bmatrix}, \quad [\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2{,}5 \end{bmatrix} .$$

c) Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale matriceale se poate exprima sub forma $\{x\} = [\mu]\,\{\xi\}$ în funcţie de coordonatele normale, sau sub forma matriceală:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2{,}5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t \\ A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t \end{Bmatrix} ,$$

în care constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale:

$$t = 0 , \quad \{x_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{x}_0\} = \begin{Bmatrix} R\omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

Se obţin valorile:

$$A_1 = A_2 = 0\,,\quad B_1 = \frac{R\omega_0}{1{,}4p_1} = 0{,}4R\,,\quad B_2 = \frac{R\omega_0}{3{,}5p_2} = 0{,}11R\,,$$

cu care se pot scrie legile de mişcare cerute şi forma lor matriceală:

$$x_1 = 0{,}4R\sin 1{,}732\omega_0 t + 0{,}11R\sin 2{,}59\omega_0 t\ ,$$

$$x_2 = 0{,}4R\sin 1{,}732\,\omega_0 t - 0{,}275\sin 2{,}59\omega_0 t\ ,$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2{,}5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}4\,R\sin 1{,}732\,\omega_0 t \\ 0{,}11\,R\sin 2{,}59\,\omega_0 t \end{Bmatrix}.$$

Observaţie: Aici nu se mai pune problema de a verifica dacă firele sunt întinse tot timpul mişcării, deoarece ele pot fi pretensionate cu ajutorul arcurilor elicoidale de constante elastice k şi 2k.

4.2.2. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = \pi/6$ faţă de orizontală se rostogoleşte fără alunecare un disc circular omogen de rază R şi masă 6m. În centrul O al discului este articulată o bară omogenă OA de masă 3m şi lungime 4R printr-o articulaţie fără frecare, iar între fusul articulaţiei şi un perete fix este montat un arc elicoidal paralel cu planul înclinat de constantă elastică k = 9 mg/2R. La momentul iniţial al mişcării, se deplasează centrul discului cu x_0 paralel cu planul înclinat în jos, din poziţia de echilibrul static a sistemului, bara fiind menţinută în poziţie verticală, după care sistemul este lăsat liber.

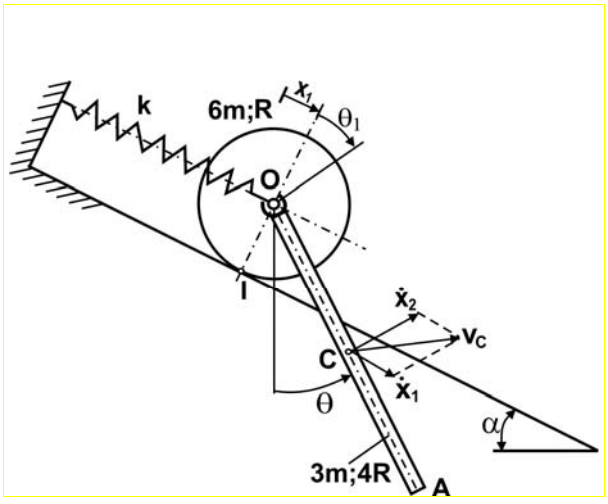


Fig. 4.2.2

Să se determine:

a) energia cinetică, energia potenţială şi ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sistemului pentru oscilaţii mari, în funcţie de parametrii de poziţie x_1 şi $x_2 = 2R\theta$, măsuraţi din poziţia de echilibru static;

b) energia cinetică, energia potenţială, ecuaţiile

diferenţiale ale mişcării, pulsaţiile proprii şi vectorii proprii pentru sistem, în cazul micilor oscilaţii în jurul poziţiei sale de echilibru static;

c) legile de mişcare, forma lor matriceală şi valorile deplasării iniţiale x_0 pentru ca sistemul să efectueze mici oscilaţii $\left(\theta_0 \le 5^o\right)$.

Rezolvare

a) Se observă că cele 2 corpuri ale sistemului au fiecare câte o mişcare plană în planul vertical din fig.4.2.2. Pentru disc se cunoaşte poziţia centrului instantaneu de rotaţie I, deoarece, conform enunţului, acesta se rostogoleşte fără să alunece pe planul înclinat, deci se obţine $\dot\theta_1 = \dot x_1 / R$. Pentru bară nu este necesar să se determine poziţia centrului instantaneu de rotaţie, deoarece viteza sa unghiulară este $\dot\theta = \dot x_2 / 2R$, iar viteza centrului său de greutate C se poate determina pe baza formulei generale de distribuţie a vitezelor unui corp rigid, astfel încât rezultă:

$$\vec V_c = \vec V_0 + \vec\omega_2 x \overrightarrow{OC}, \quad V_c = \sqrt{\dot x_1^2 + \dot x_2^2 + 2\dot x_1 \dot x_2 \cos\left(\frac{x_2}{2R} + \frac{\pi}{6}\right)}\ .$$

Cu aceste relaţii cinematice se poate calcula energia cinetică a sistemului:

$$E_c = \frac{1}{2} 6m\dot x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{6mR^2}{2}\frac{\dot x_1^2}{R^2} + \frac{1}{2}3m\left(\dot x_1^2 + \dot x_2^2 + 2\dot x_1 \dot x_2 \cos\left(\frac{x_2}{2R} + \frac{\pi}{6}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{3m \cdot 16R^2}{12}\frac{\dot x_2^2}{4R^2} = 6m\dot x_1^2 + 2m\dot x_2^2 + 3m\dot x_1 \dot x_2 \cos\left(\frac{x_2}{2R} + \frac{\pi}{6}\right).$$

Notând cu x_{st} deformaţia arcului până în poziţia de echilibru static a sistemului, energia sa potenţială devine:

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(x_1 + x_{st}\right)^2 - 9mgx_1 \sin\frac{\pi}{6} + 3mg \cdot 2R\left(1 - \cos\frac{x_2}{2R}\right) - \frac{1}{2}kx_{st}^2\ .$$

Deformaţia statică x_{st} se determină din condiţia ca în poziţia de echilibru static a sistemului, pentru care $x_1 = x_2 = 0$, energia sa potenţială să fie minimă, deci rezultă:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = k\left(x_1 + x_{st}\right) - \frac{9}{2}mg = \frac{9mg}{2R}x_1, \quad x_{st} = R, \quad \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = 3mg \sin\frac{x_2}{2R}$$

Pentru stabilirea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării, se folosesc ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua sub formă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_j}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial x_j}+\frac{\partial E_p}{\partial x_j}=0\,,\quad j=1,2$$

cu ajutorul cărora rezultă:

$$12m\ddot{x}_1+3m\ddot{x}_2\cos\left(\frac{x_2}{2R}+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3m}{2R}\dot{x}_2^2\sin\left(\frac{x_2}{2R}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{9mg}{2R}x_1=0\,,$$

$$3m\ddot{x}_1\cos\left(\frac{x_2}{2R}+\frac{\pi}{6}\right)+4m\ddot{x}_2+3mg\sin\frac{x_2}{2R}=0$$

Se observă că, în cazul oscilaţiilor mari ale sistemului, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sale sunt profund neliniare. O integrală primă a acestor ecuaţii diferenţiale se poate obţine aplicând teorema conservării energiei mecanice, dar aceasta nu prezintă interes pentru sisteme cu mai multe grade de libertate.

b) În cazul micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru static a sistemului, energia sa cinetică şi cea potenţială se exprimă ca forme pătratice şi omogene de vitezele generalizate $\dot{x}_1\,,\dot{x}_2$, respectiv de coordonatele generalizate x_1 , x_2 , deci rezultă:

$$E_c=6m\dot{x}_1^2+2m\dot{x}_2^2+3m\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\frac{\pi}{6}=6m\dot{x}_1^2+2m\dot{x}_2^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2\ ,$$

$$E_p=\frac{1}{2}\frac{9mg}{2R}x_1^2+6mgR\cdot 2\left(\frac{x_2}{4R}\right)^2=\frac{9mg}{4R}x_1^2+\frac{3mg}{4R}x_2^2$$

Ca urmare, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării devin:

$$12m\ddot{x}_1+\frac{3\sqrt{3}}{2}m\ddot{x}_2+\frac{9mg}{2R}x_1=0\ ,$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}m\ddot{x}_1+4m\ddot{x}_2+\frac{3mg}{2R}x_2=0\ ,$$

care, folosind notaţia $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}}$, se pot exprima sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} 12 & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

Acelaşi rezultat se obţine dacă se linearizează direct ecuaţiile diferenţiale nelineare ale mişcării, stabilite în cazul oscilaţiilor mari ale sistemului.

Pulsaţiile proprii ale sistemului se determină din ecuaţia caracteristică:

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{2}\omega_0^2 - 12p^2 & -\frac{3\sqrt{3}}{2}p^2 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}p^2 & \frac{3}{2}\omega_0^2 - 4p^2 \end{vmatrix} = \frac{165}{4}p^4 - 36\omega_0^2 p^2 + \frac{27}{4}\omega_0^4 = 0 ,$$

din care rezultă:

$$p_{1,2}^2 = 9\omega_0^2 \frac{8 \mp 3}{165}, \qquad p_1 = \sqrt{\frac{3}{11}}\omega_0 = 0{,}522\omega_0, \qquad p_0 = \sqrt{\frac{3}{5}}\omega_0 = 0{,}775\omega_0$$

Cei doi vectori proprii, care trebuie să fie normaţi, se determină din ecuaţia matriceală:

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2}\omega_0^2 - 12p_r^2 & -\frac{3\sqrt{3}}{2}p_r^2 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}p_r^2 & \frac{3}{2}\omega_0^2 - 4p_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \mu_{2r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad r = 1, 2, \ldots ,$$

din care rezultă $\mu_{21} = \sqrt{3}$ şi $\mu_{22} = -\sqrt{3}$. Ca urmare, vectorii proprii normaţi şi matricea metodă normată corespunzătoare devin:

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}, \quad \{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{Bmatrix}, \quad [\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} .$$

c) Soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării în cazul micilor oscilaţii se poate exprima sub forma matriceală:

$$\{x\} = [\mu]\{\xi\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t \\ A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t \end{Bmatrix} ,$$

în care constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale:

$$t = 0 , \quad \{x\}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ 0 \end{Bmatrix} , \quad \{\dot{x}\}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

Se obţin valorile:

$$A_1 = A_2 = \frac{x_0}{2} , \quad B_1 = B_2 = 0 ,$$

cu ajutorul cărora se pot exprima legile de mişcare cerute, precum şi forma lor matriceală:

$$x_1 = \frac{x_0}{2} \cos \sqrt{\frac{3}{11}} \omega_0 t + \frac{x_0}{2} \cos \sqrt{\frac{3}{5}} \omega_0 t ,$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} x_0 \cos \sqrt{\frac{3}{11}} \omega_0 t - \frac{\sqrt{3}}{2} x_0 \cos \sqrt{\frac{3}{5}} \omega_0 t ,$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{x_0}{2} \cos \sqrt{\frac{3}{11}} \omega_0 t \\ \frac{x_0}{2} \cos \sqrt{\frac{3}{5}} \omega_0 t \end{Bmatrix} .$$

Pentru a determina valorile cerute în enunţ ale deplasării iniţiale $x_0 > 0$, este necesar să se exprime în funcţie de x_0 amplitudinea θ_0 a oscilaţiilor mici de rotaţie ale barei. Pentru aceasta se calculează:

$$\theta = \frac{x_2}{2R} = \frac{\sqrt{3}x_0}{4R}\left(\cos\sqrt{\frac{3}{11}}\omega_0 t - \cos\sqrt{\frac{3}{5}}\omega_0 t\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}x_0}{4R}\sqrt{2+2\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{3}{11}}\right)\omega_0 t}\,\cos\left(\left(\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{3}{11}}\right)\omega_0 t+\psi\right),$$

unde s-a folosit formula de calcul a amplitudinii mişcării rezultante la compunerea a două vibraţii armonice de pulsaţii diferite, astfel încât rezultă:

$$\theta_0 = \frac{\sqrt{3}x_0}{2R} \le \frac{\pi}{36}, \quad x_0 \le \frac{\sqrt{3}\pi}{54}R = 0{,}1\,R\,.$$

Observaţie: Alunecarea discului pe planul înclinat poate fi împiedicată numai de forţa de frecare de alunecare corespunzătoare, care se poate determina aplicând principiul lui d'Alembert pentru întregul sistem.

4.2.3. În fig.4.2.3. este reprezentat modelul de translaţie al unui sistem vibrant cu 3 grade de libertate, pentru care se dau masele, constantele elastice şi coeficienţii de amortizare vâscoasă, pentru care există relaţiile: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $c = 0{,}1\sqrt{mk}$.

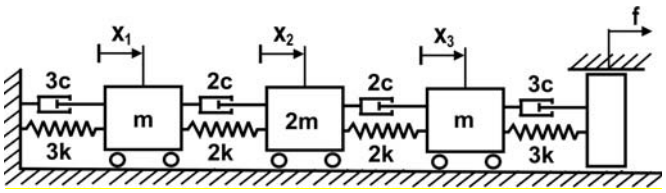


Fig. 4.2.3

Parametrii de poziţie din figură se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului, în care suportul din dreapta este fixat şi arcurile elicoidale sunt pretensionate cu acelaşi efort static. Să se determine:

a) pulsaţiile proprii, vectorii proprii şi matricea modală normată pentru sistemul fără amortizare;

b) legile de mişcare şi forma lor martriceală pentru vibraţiile libere cu amortizaree vâscoasă ale sistemului, dacă, la momentul iniţial al mişcării, în poziţia de echilibru static se imprimă corpului de masă 2m viteza iniţială v_0 pe orizontală spre dreapta;

c) legile de mişcare forţată şi forma lor matriceală pentru vibraţiile forţate cu amortizare vâscoasă ale sistemului, dacă, la un moment dat, suportul din dreapta începe să vibreze pe orizontală după legea $f = r\sin\omega_0 t$.

Rezolvare

a) Folosind notaţiile matriceale cunoscute, ecuaţiile diferenţiale ale vibraţiilor libere şi neamortizate ale sistemului se exprimă prin forma matriceală: $[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$, unde matricele de inerţie şi de rigiditate sunt:

$$[m]=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}=m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[k]=\begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 4k & -2k \\ 0 & -2k & 5k \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pulsaţiile proprii ale sistemului se determină din ecuaţia caracteristică:

$$\left|[k]-p^2[m]\right|=\begin{vmatrix} 5k-mp^2 & -2k & 0 \\ -2k & 4k-2mp^2 & -2k \\ 0 & -2k & 5k-mp^2 \end{vmatrix}=$$

$$=2\left(5k-mp^2\right)\left(m^2p^4-7mkp^2+6k^2\right)=0$$

din care rezultă: $p_1=\omega_0$, $p_2=\sqrt{5}\omega_0$, $p_3=\sqrt{6}\omega_0$. Vectorii proprii normaţi se determină din ecuaţia matriceală:

$$\begin{vmatrix} 5k-mp_r^2 & -2k & 0 \\ -2k & 4k-2mp_r^2 & -2k \\ 0 & -2k & 5k-mp_r^2 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \mu_{2r} \\ \mu_{3r} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},\quad r=1,2,3,$$

astfel încât aceştia şi matricea modală normată devin:

$$\{\mu\}_1=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix},\quad \{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}1\\0\\-1\end{Bmatrix},\quad \{\mu\}_3=\begin{Bmatrix}1\\-0,5\\1\end{Bmatrix},\quad [\mu]_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & -0,5\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

b) Ecuaţiile diferenţiale ale vibraţiilor libere cu amortizare vâscoasă ale sistemului se exprimă sub forma lor matriceală:

$$\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\0 & 2m & 0\\0 & 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\\\ddot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}5c & -2c & 0\\-2c & 4c & -2c\\0 & -2c & 5c\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}5k & -2k & 0\\-2k & 4k & -2k\\0 & -2k & 5k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

de unde se observă că sistemul are amortizare proporţională, deoarece elementele matricei de amortizare [c] sunt proporţionale cu cele ale matricei de rigiditate [k]. Ca urmare, trecând la coordonatele normale $\{\xi\}$ cu transformarea de coordonate $\{x\}=[\mu]\{\xi\}$, unde [μ] este matricea modală normată pentru sistemul fără amortizare, se ajunge la matricele modale de inerţie, de amortizare, respectiv de rigiditate, care rezultă toate diagonale, astfel încât ecuaţiile diferenţiale în coordonate normale se decuplează. Într-adevăr, dacă, după efectuarea transformării de coordonate, se înmulţeşte la stânga ecuaţia matriceală cu $[\mu]^T$ şi se înlocuiesc $c=0,1m\omega_0$ şi $k=m\omega_0^2$, atunci se obţin matricele modale:

$$[M]=[\mu]^T[m][\mu]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -0,5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\0 & 2m & 0\\0 & 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & -0,5\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=m\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2,5\end{bmatrix},$$

$$[C]=[\mu]^T[c][\mu]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -0,5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5c & -2c & 0\\ -2c & 4c & -2c\\ 0 & -2c & 5c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -0,5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=m\omega_0\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1,5\end{bmatrix},$$

$$[K]=[\mu]^T[k][\mu]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -0,5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5k & -2k & 0\\ -2k & 4k & -2k\\ 0 & -2k & 5k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -0,5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=m\omega_0^2\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{bmatrix},$$

Ecuaţiile diferenţiale în coordonate normale devin:

$$10\ddot{\xi}_1+\omega_0\dot{\xi}_1+10\omega_0^2\xi_1=0,$$
$$2\ddot{\xi}_2+\omega_0\dot{\xi}_2+10\omega_0^2\xi_2=0\ ,$$
$$2,5\ddot{\xi}_3+1,5\omega_0\dot{\xi}_3+15\omega_0^2\xi_3=0,$$

astfel încât soluţia generală pentru vibraţiile libere cu amortizare vâscoasă ale sistemului se poate exprima sub forma matriceală:

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -0,5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{-\sigma_1 t}\left(A_1\cos h_1 t+B_1\sin h_1 t\right)\\ e^{-\sigma_2 t}\left(A_2\cos h_2 t+B_2\sin h_2 t\right)\\ e^{-\sigma_3 t}\left(A_3\cos h_3 t+B_3\sin h_3 t\right)\end{Bmatrix}$$

în care factorii de amortizare şi pseudopulsaţiile vibraţiilor amortizate rezultă:

$$\sigma_1=0,05\,\omega_0,\quad \sigma_2=0,25\,\omega_0,\quad \sigma_3=0,3\,\omega_0,$$
$$h_1=\sqrt{p_1^2-\sigma_1^2}=0,999\,\omega_0,\ h_2=\sqrt{p_2^2-\sigma_2^2}=2,222\,\omega_0,\ h_3=\sqrt{p_3^2-\sigma_3^2}=2,431\omega_0.$$

Constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale:

$$t=0,\ \ \{x_0\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix},\ \ \{\dot{x}_0\}_0=\begin{Bmatrix}0\\v_0\\0\end{Bmatrix},$$

din care se obţin:

$$A_1=A_2=A_3=B_2=0,\ \ B_1=\frac{2v_0}{5h_1}=0{,}4v_0,\ \ B_3=-\frac{0{,}4v_0}{h_3}=0{,}16v_0.$$

Legile de mişcare cerute şi forma lor matriceală devin:

$$x_1=0{,}4v_0e^{-0{,}05\omega_0 t}\sin\omega_0 t-0{,}16v_0e^{-0{,}3\omega_0 t}\sin 2{,}43\omega_0 t,$$

$$x_2=0{,}8v_0e^{-0{,}05\omega_0 t}\sin\omega_0 t+0{,}08v_0e^{-0{,}3\omega_0 t}\sin 2{,}43\omega_0 t,$$

$$x_3=0{,}4v_0e^{-0{,}05\omega_0 t}\sin\omega_0 t-0{,}16v_0e^{-0{,}3\omega_0 t}\sin 2{,}43\omega_0 t,$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&-0{,}5\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0{,}4v_0e^{-0{,}05\omega_0 t}\sin 2{,}43\omega_0 t\\0\\-0{,}16v_0e^{-0{,}05\omega_0 t}\sin 2{,}43\omega_0 t\end{Bmatrix},$$

unde s-au aproximat $h_1=\omega_0$ şi $h_3=2{,}43\ \omega_0$.

c) Ecuaţiile diferenţiale ale vibraţiilor forţate cu amortizare vâscoasă ale sistemului se exprimă sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix}m&0&0\\0&2m&0\\0&0&m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\\\ddot{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}5c&-2c&0\\-2c&4c&-2c\\0&-2c&5c\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}5k&-2k&0\\-2k&4k&-2k\\0&-2k&5k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\F(t)\end{Bmatrix},$$

unde forţa perturbatoare transmisă prin arc şi amortizor, datorită vibraţiei suportului lor comun, este

$$F(t) = 3kf + 3c\dot{f} = 3m\omega_0^2 r\sin\omega_0 t + 0{,}3m\omega_0^2 r\cos\omega_0 t =$$

$$= F_0\sin(\omega_0 t + \varphi), \quad F_0 = 3m\omega_0^2 r, \quad \varphi = \operatorname{arctg} 0{,}1.$$

Sistemul având amortizare proporţională, se pot determina mai uşor atât vibraţiile sale libere, cât şi cele forţate, trecând la coordonate normale cu transformarea de coordonate $\{x\} = [\mu]\{\xi\}$. Forţele perturbatoare modale se obţin sub forma matriceală:

$$\{P(t)\} = [\mu]^T\{F(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \end{Bmatrix} = 3m\omega_0^2 r\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

astfel încât ecuaţiile diferenţiale în coordonate normale devin:

$$10\ddot{\xi}_1 + \omega_0\dot{\xi}_1 + 10\omega_0^2\xi_1 = 3\omega_0^2 r\sin(\omega_0 t + \varphi),$$
$$2\ddot{\xi}_2 + \omega_0\dot{\xi}_2 + 10\omega_0^2\xi_2 = -3\omega_0^2 r\sin(\omega_0 t + \varphi),$$
$$2{,}5\ddot{\xi}_3 + 1{,}5\omega_0\dot{\xi}_3 + 15\omega_0^2\xi_3 = 3\omega_0^2 r\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Soluţiile particulare ale acestor ecuaţii diferenţiale vor fi de forma:

$$\xi_{1p} = \xi_{01}\sin(\omega_0 t + \varphi - \psi_1),$$
$$\xi_{2p} = \xi_{02}\sin(\omega_0 t + \varphi + \psi_2),$$
$$\xi_{3p} = \xi_{03}\sin(\omega_0 t + \varphi - \psi_3),$$

iar din condiţia ca acestea să verifice ecuaţiile diferenţiale, rezultă:

$$\xi_{01} = 3r, \quad \psi_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \xi_{02} = -\frac{3\sqrt{65}}{63}r = -0{,}384\,r,$$

$$\psi_2 = \operatorname{arctg} 0{,}125; \quad \xi_{03} = \frac{3\sqrt{634}}{317}r = 0{,}238\,r, \quad \psi_3 = \operatorname{arctg} 0{,}12.$$

Ca urmare, legile de mişcare forţată se pot exprima uşor sub forma lor matriceală:

$$\{x\}_p = [\mu]\{\xi\}_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -0,5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3r\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ -0,384r\sin(\omega_0 t + \varphi + \psi_2) \\ 0,238r\sin(\omega_0 t + \varphi + \psi_3) \end{Bmatrix},$$

de unde rezultă imediat legile de mişcare pentru fiecare corp al modelului de translaţie considerat.

Observaţie: Amplitudinea cea mai mare a vibraţiilor forţate ale sistemului se obţine pentru primul mod natural de vibraţie ξ_1 , deoarece pulsaţia ω_0 a forţei perturbatoare este egală cu pulsaţia fundamentală p_1 a sistemului fără amortizare, iar factorii de amortizare sunt mult mai mici decât pulsaţiile proprii corespunzătoare.

4.2.4. – 4.2.14. Se consideră sistemul vibrant cu două grade de libertate din fig.4.2.4. – 4.2.14, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile, pentru care se cunosc datele notate alături şi $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Neglijând frecările şi ştiind că parametrii de poziţie independenţi din figură se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului, să se determine:

a) energia cinetică a sistemului, energia sa potenţială şi ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sub formă matriceală ;

b) pulsaţiile proprii şi vectorii proprii ;

c) soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării sub formă matriceală.

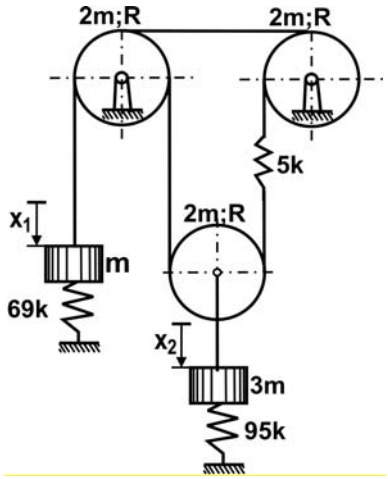


Fig. 4.2.4

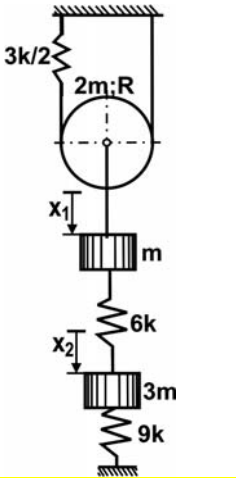


Fig. 4.2.5

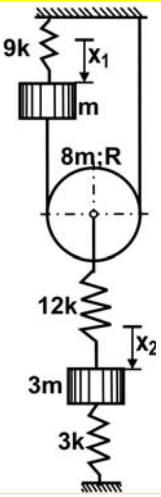


Fig. 4.2.6

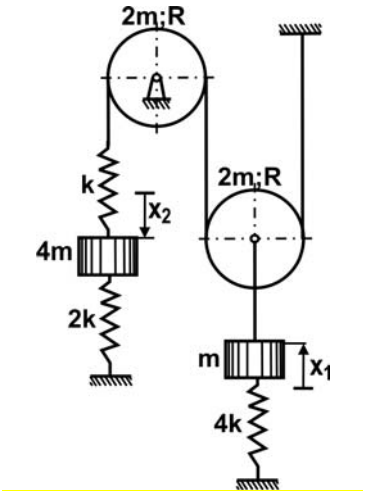


Fig. 4.2.7

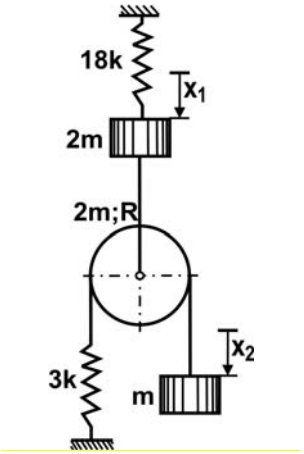


Fig. 4.2.8

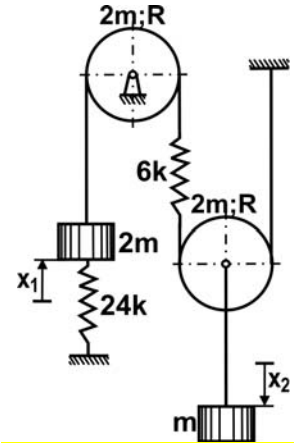


Fig. 4.2.9

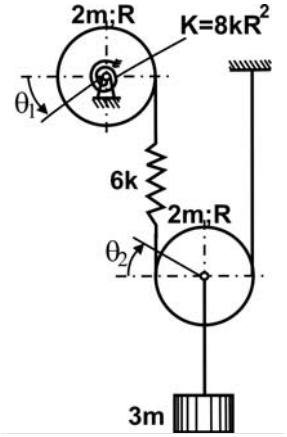


Fig. 4.2.10

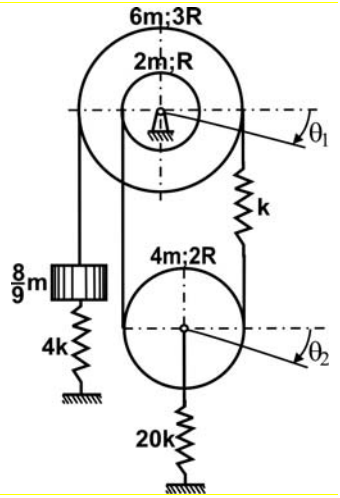


Fig. 4.2.11

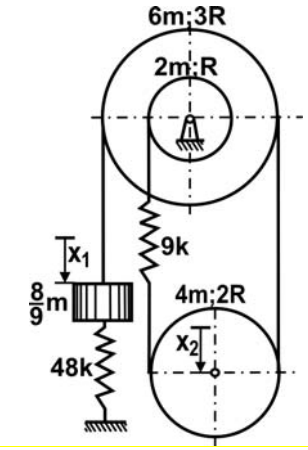


Fig. 4.2.12

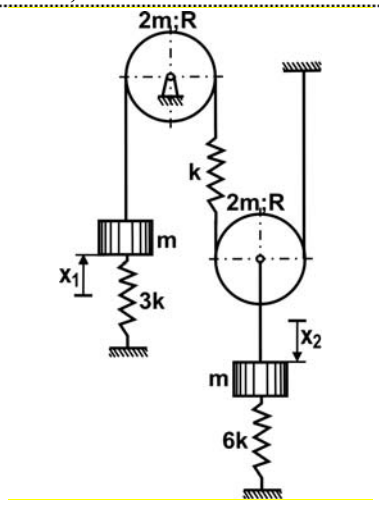


Fig. 4.2.13

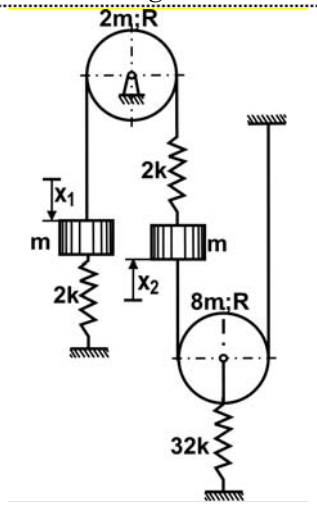


Fig. 4.2.14

Rezultatele sunt date în tabelul următor, la punctul a) fiind dată numai forma matriceală a ecuațiilor diferențiale ale mişcării sistemului.

Tabelul cu rezultate – problemele 4.2.4 – 4.2.14

Nr. probl.	*a)*	*b)*	*c)*
4.2.4	$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+23\omega_0^2\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1=\sqrt{15}\omega_0=3{,}87\omega_0$, $p_2=\sqrt{23}\omega_0=4{,}8\omega_0$ $\{\mu\}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 0{,}6\end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0{,}6 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\cos\sqrt{15}\omega_0 t+B_1\sin\sqrt{15}\omega_0 t\\ A_2\cos\sqrt{23}\omega_0 t+B_2\sin\sqrt{23}\omega_0 t\end{Bmatrix}$
4.2.5	$\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+3\omega_0^2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1=\sqrt{2}\omega_0=1{,}414\omega_0$, $p_2=\sqrt{6}\omega_0=2{,}45\omega_0$ $\{\mu\}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 2/3\end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -2\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2/3 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\cos\sqrt{2}\omega_0 t+B_1\sin\sqrt{2}\omega_0 t\\ A_2\cos\sqrt{6}\omega_0 t+B_2\sin\sqrt{6}\omega_0 t\end{Bmatrix}$
4.2.6	$\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+3\omega_0^2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1=\sqrt{2}\omega_0=1{,}414\omega_0$, $p_2=\sqrt{6}\omega_0=2{,}45\omega_0$ $\{\mu\}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 2/3\end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -2\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2/3 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\cos\sqrt{2}\omega_0 t+B_1\sin\sqrt{2}\omega_0 t\\ A_2\cos\sqrt{6}\omega_0 t+B_2\sin\sqrt{6}\omega_0 t\end{Bmatrix}$

4.2.7	$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 = 0{,}7\omega_0$, $p_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 = 1{,}118\omega_0$ $\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 t + B_1 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 t \\ A_2 \cos\frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 t + B_2 \sin\frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 t \end{Bmatrix}$
4.2.8	$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + 3\omega_0^2 \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$, $p_2 = \sqrt{6}\omega_0 = 2{,}45\omega_0$ $\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \cos\omega_0 t + B_1 \sin\omega_0 t \\ A_2 \cos\sqrt{6}\omega_0 t + B_2 \sin\sqrt{6}\omega_0 t \end{Bmatrix}$
4.2.9	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + 6\omega_0^2 \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$p_1 = 2\omega_0$, $p_2 = 2\sqrt{3}\omega_0 = 4{,}464\omega_0$ $\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \cos 2\omega_0 t + B_1 \sin 2\omega_0 t \\ A_2 \cos 2\sqrt{3}\omega_0 t + B_2 \sin 2\sqrt{3}\omega_0 t \end{Bmatrix}$

4.2.10	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+2\omega_0^2\begin{bmatrix}7 & -6\\ -6 & 12\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1=\sqrt{2}\omega_0=1{,}41\omega_0$, $p_2=4\omega_0$ $\{\mu\}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -1/6\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1/6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\cos\sqrt{2}\omega_0 t+B_1\sin\sqrt{2}\omega_0 t\\ A_2\cos 4\omega_0 t+B_2\sin 4\omega_0 t\end{Bmatrix}$
4.2.11	$\begin{bmatrix}40 & -8\\ -8 & 24\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix}+8\omega_0^2\begin{bmatrix}9 & -7\\ -7 & 12\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1=\omega_0$, $p_2=\sqrt{59/14}\omega_0=$ $=2{,}05\omega_0$ $\{\mu\}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 2/3\end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -13/3\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2/3 & -13/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\cos\omega_0 t+B_1\sin\omega_0 t\\ A_2\cos p_2 t+B_2\sin p_2 t\end{Bmatrix}$
4.2.12	$\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+4\omega_0^2\begin{bmatrix}13 & 3\\ 3 & 9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1=\sqrt{6}\omega_0=2{,}45\omega_0$, $p_2=3\omega_0$ $\{\mu\}_1=\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2=\begin{Bmatrix}-3\\ 1\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\cos\sqrt{6}\omega_0 t+B_1\sin\sqrt{6}\omega_0 t\\ A_2\cos 3\omega_0 t+B_2\sin 3\omega_0 t\end{Bmatrix}$

4.2.13	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + 2\omega_0^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$p_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\omega_0 = 1{,}225\omega_0$, $p_2 = \sqrt{3}\omega_0 = 1{,}73\omega_0$ $\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}5 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \cos\frac{\sqrt{6}}{2}\omega_0 t + B_1 \sin\frac{\sqrt{6}}{2}\omega_0 t \\ A_2 \cos\sqrt{3}\omega_0 t + B_2 \sin\sqrt{3}\omega_0 t \end{Bmatrix}$
4.2.14	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + 23\omega_0^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$p_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\omega_0 = 1{,}225\omega_0$, $p_2 = \sqrt{3}\omega_0 = 1{,}73\omega_0$ $\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{Bmatrix}$, $\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}5 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \cos\frac{\sqrt{6}}{2}\omega_0 t + B_1 \sin\frac{\sqrt{6}}{2}\omega_0 t \\ A_2 \cos\sqrt{3}\omega_0 t + B_2 \sin\sqrt{3}\omega_0 t \end{Bmatrix}$

4.2.15. – 4.2.25. Se consideră sistemul vibrant cu două grade de libertate din fig.4.2.15 – 4.2.25, format din corpuri omogene legate între ele prin legături ideale, pentru care se cunosc datele notate alăturat, între aceste date existând relațiile notate pe figură. Ştiind că parametrii de poziție independenți din figură se măsoară din poziția de echilibru static a sistemului, să se determine:

a) energia cinetică a sistemului, energia sa potențială şi ecuațiile diferențiale ale mişcării în cazul oscilațiilor mari în jurul poziției sale de echilibru static ;

b) ecuațiile diferențiale ale mişcării sub formă matriceală în cazul micilor oscilații ale sistemului în jurul poziției sale de echilibru static;

c)pulsațiile proprii ale sistemului, vectorii proprii şi matricea modală normată, în cazul micilor oscilații.

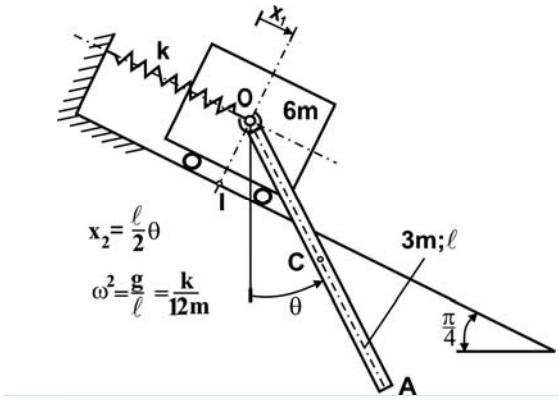


Fig. 4.2.15

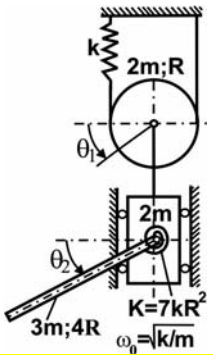


Fig. 4.2.16

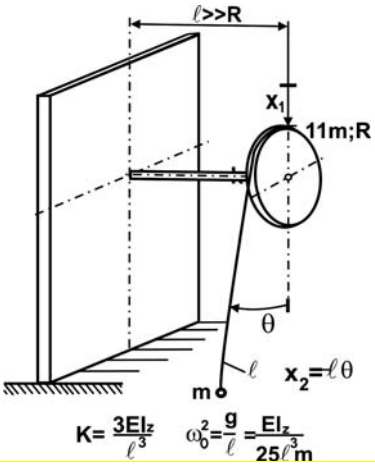


Fig. 4.2.17

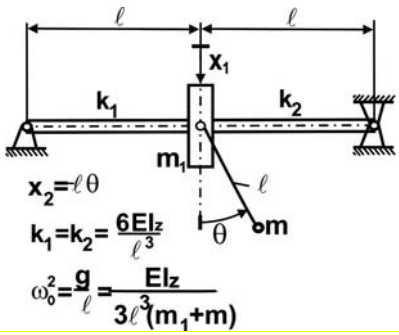


Fig. 4.2.18

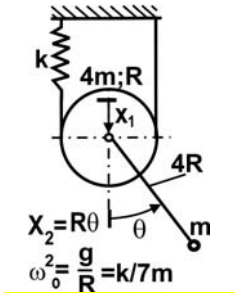


Fig. 4.2.19

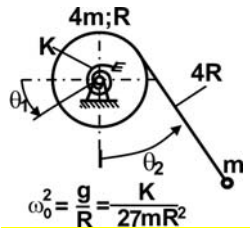


Fig. 4.2.20

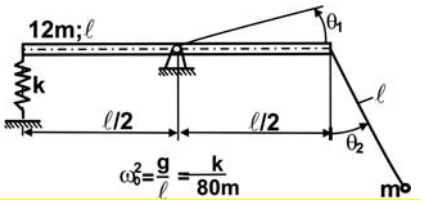


Fig. 4.2.21

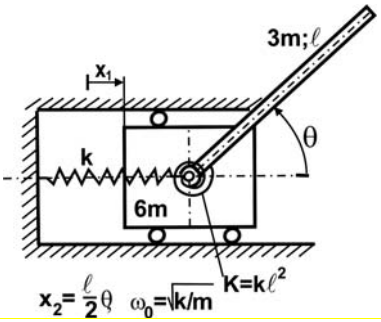


Fig. 4.2.22

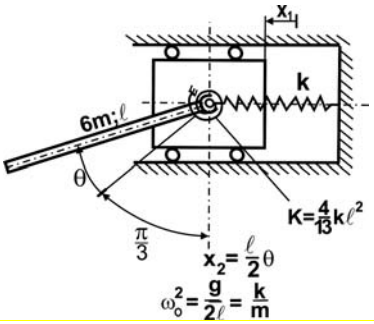


Fig. 4.2.23

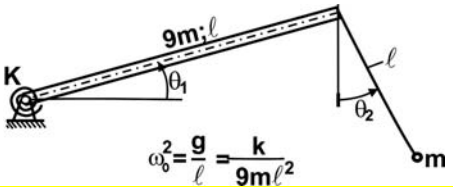


Fig. 4.2.24

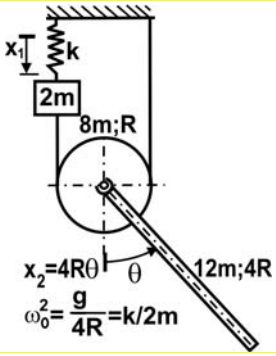


Fig. 4.2.25

Rezultatele sunt date în tabelul următor. La punctul a) nu sunt date ecuațiile diferențiale ale mișcării care se obțin ușor aplicând ecuațiile lui Lagrange de speța a doua pentru sisteme conservative, iar la punctul c) nu sunt explicitați vectorii proprii, care se regăsesc în matricea modală normată pe coloane.

Tabelul cu rezultate – problemele 4.2.15 – 4.2.25

Nr. probl.	*a)*	*b)*	*c)*
4.2.15	$E_c = 4m\dot{x}_1^2 + 2m\dot{x}_2^2 + 3m\dot{x}_1\dot{x}_2 \cdot \cos\left(\frac{2x_2}{\ell} + \frac{\pi}{4}\right)$, $E_p = 6m\omega_0^2 x_1^2 + \frac{3}{2}m\omega_0^2\ell^2\left(1 - \cos\frac{2x_2}{\ell}\right)$	$\begin{bmatrix} 8 & 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + 6\omega_0\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$	$p_1 = \frac{2\sqrt{33}}{11}\omega_0 = 1{,}04\omega_0$, $p_2 = \frac{2\sqrt{55}}{5} = 2{,}97\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$
4.2.16	$E_c = 4mR^2\dot{\theta}_1^2 + 8mR^2\dot{\theta}_2^2 + 6mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$, $E_p = 2mR^2\omega_0^2\theta_1^2 + \frac{7}{2}mR^2\omega_0^2\theta_2^2$	$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 16\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$	$p_1 = \sqrt{\frac{7}{23}}\omega_0 = 0{,}55\omega_0$, $p_2 = \omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6/7 & -2/3\end{bmatrix}$
4.2.17	$E_c = 6m\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\left(1 + \frac{R}{\ell^2}x_2\right)^2\dot{x}_2^2 - m\left(1 + \frac{R}{\ell^2}x_2\right)\dot{x}_1\dot{x}_2\sin\frac{x_2}{\ell}$, $E_p = \frac{75}{2}m\omega_0^2x_1^2 + m\omega_0^2\left(\ell^2 + R\ell\sin\frac{x_2}{\ell} - \ell^2\cos\frac{x_2}{\ell} - Rx_2\cos\frac{x_2}{\ell}\right)$	$\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix} 75 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$, $p_2 = 2{,}5\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$

4.2.18	$E_c = \frac{m_1+m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - m\dot{x}_1\dot{x}_2 \sin\frac{x_2}{\ell}$, $E_p = 18(m_1+m)\omega_0^2 x_1^2 + m\omega_0^2\ell^2\left(1-\cos\frac{x_2}{\ell}\right)$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix}36 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$, $p_2 = 6\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
4.2.19	$E_c = \frac{7}{2}m\dot{x}_1^2 + 8m\dot{x}_2^2 - 4m\dot{x}_1\dot{x}_2 \sin\frac{x_2}{R}$, $E_p = 14m\omega_0^2 x_1^2 + 4m\omega_0^2 R^2\left(1-\cos\frac{x_2}{R}\right)$	$\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 16\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + 4\omega_0^2\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1 = 0{,}5\omega_0$, $p_2 = 2\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
4.2.20	$E_c = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m}{2}R^2(4+\theta_1)^2\dot{\theta}_2^2$, $E_p = \frac{27}{2}mR^2\omega_0^2\theta_1^2 +$ $+ mR^2\omega_0^2(4+\sin\theta_1 - (4+\theta_1)\cos\theta_2)$	$\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 16\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix}27 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1 = 0{,}5\omega_0$, $p_2 = 3\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
4.2.21	$E_c = \frac{5}{8}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m}{2}\ell^2\left(\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$ $E_p = 10m\ell^2\omega_0^2\theta_1^2 + m\ell^2\omega_0^2(1-\cos\theta_2)$	$\begin{bmatrix}5/4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix}20 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$, $p_2 = 4\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

4.2.22	$E_c = \frac{9}{2}m\dot{x}_1^2 + 2m\dot{x}_2^2 - 3m\dot{x}_1\dot{x}_2 \cdot \sin\frac{2x_2}{\ell}$, $E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_1^2 + 2m\omega_0^2 x_2^2$	$\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1 = \frac{\omega_0}{3}$, $p_2 = \omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
4.2.23	$E_c = \frac{7}{2}m\dot{x}_1^2 + 4m\dot{x}_2^2 + 6m\dot{x}_1\dot{x}_2 \cdot \cos\left(\frac{2x_2}{\ell} + \frac{\pi}{3}\right)$, $E_p = \frac{m}{2}\omega_0^2 x_1^2 + \frac{8m}{13}\omega_0^2 x_2^2 +$ $+ 6m\omega_0^2\ell^2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(\frac{2x_2}{\ell} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$	$\begin{bmatrix}7 & 3\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + \frac{\omega_0^2}{13}\begin{bmatrix}13 & 0\\ 0 & 172\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1 = \sqrt{\frac{86}{611}}\omega_0 = 0{,}375\omega_0$, $p_2 = \sqrt{2}\omega_0 = 1{,}414\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 3/86 & -13/6\end{bmatrix}$
4.2.24	$E_c = 2m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}_2^2 - m\ell^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$, $E_p = \frac{9}{2}m\ell^2\omega_0^2\theta_1^2 + m\ell^2\omega_0^2(1 - \cos\theta_2)$	$\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{Bmatrix} + \omega_0^2\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$, $p_2 = 1{,}5\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
4.2.25	$E_c = 4m\dot{x}_1^2 + 2m\dot{x}_2^2 - 3m\dot{x}_1\dot{x}_2 \cdot \sin\frac{x_2}{4R}$, $E_p = m\omega_0^2 x_1^2 + 96m\omega_0^2 R^2\left(1 - \cos\frac{x_2}{4R}\right)$	$\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + 2\omega_0^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$	$p_1 = 0{,}5\omega_0$, $[\mu] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $p_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}\omega_0 = 1{,}225\omega_0$,

4.3. Metode aproximative pentru studiul vibrațiilor

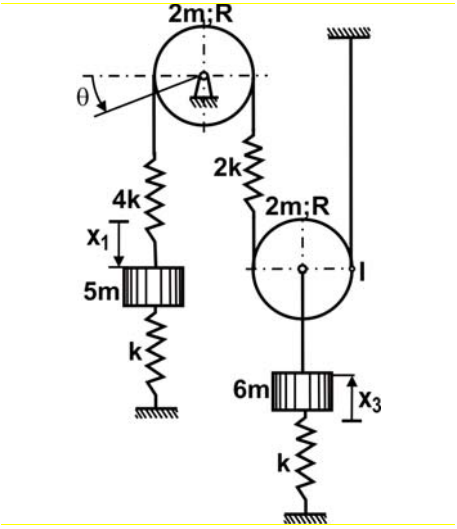


Fig. 4.3.1

4.3.1. Se consideră sistemul vibrant din fig.4.3.1, format din corpuri omogene legate între ele prin fire perfect flexibile şi inextensibile şi prin arcuri elicoidale de masă neglijabilă, pentru care datele sunt notate alăturat. Se neglijează frecările şi forțele de amortizare, iar parametrii de poziție x_1, $x_2 = R\theta$ şi x_3 din figură se măsoară din poziția de echilibru static a sistemului. Să se determine pulsațiile proprii şi vectorii proprii normați cu 3 zecimale exacte pentru sistemul considerat, folosind metoda iterației matriceale cu matricea dinamică şi cu inversa ei, precum şi relațiile de ortogonalitate ale vectorilor proprii cu matricea de inerție.

Rezolvare

Deoarece scripetele mobil, care se află într-o mişcare plană, în planul vertical al mişcării sistemului, are centrul instantaneu de rotație în I, se pot calcula uşor energia cinetică şi cea potențială pentru întregul sistem:

$$E_c = \frac{1}{2}5m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{\dot{x}_3^2}{R^2} +$$

$$+\frac{1}{2}6m\dot{x}_3^2 = \frac{5}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{9}{2}m\dot{x}_3^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}4k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}2k(x_2 - 2x_3)^2 + \frac{1}{2}kx_3^2$$

Din aceste expresii se pot scrie direct matricea de inerție [m] şi cea de rigiditate [k], care rezultă aplicând ecuațiile lui Lagrange de speța a doua:

$$[\mathrm{m}] = \mathrm{m}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad [\mathrm{k}] = \mathrm{k}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix},$$

iar inversele lor devin:

$$[\mathrm{m}]^{-1} = \frac{1}{9\mathrm{m}}\begin{bmatrix} 1{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathrm{k}]^{-1} = \frac{1}{46\mathrm{k}}\begin{bmatrix} 38 & 36 & 16 \\ 36 & 45 & 20 \\ 16 & 20 & 14 \end{bmatrix}.$$

Matricea dinamică [D] şi inversa ei rezultă:

$$[\mathrm{D}] = [\mathrm{k}]^{-1}[\mathrm{m}] = \frac{1}{46\omega_0^2}\begin{bmatrix} 190 & 36 & 144 \\ 180 & 45 & 180 \\ 80 & 20 & 126 \end{bmatrix},$$

$$[\mathrm{D}]^{-1} = [\mathrm{m}]^{-1}[\mathrm{k}] = \frac{\omega_0^2}{9}\begin{bmatrix} 9 & -7{,}2 & 0 \\ -36 & 54 & -36 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

unde s-a notat $\omega_0 = \sqrt{\mathrm{k}/\mathrm{m}}$.

Pentru a determina pulsaţia proprie fundamentală p_1 şi primul vector propriu $\{\mu\}_1$ se efectuează iteraţii cu matricea dinamică, începând cu vectorul iniţial $\left\{\mu^{(0)}\right\}^{\mathrm{T}} = \{1 \quad 1 \quad 1\}$.

$$\begin{bmatrix} 190 & 36 & 144 \\ 180 & 45 & 180 \\ 80 & 20 & 126 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 370 \\ 405 \\ 226 \end{Bmatrix} = 226\begin{Bmatrix} 1{,}6372 \\ 1{,}792 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 190 & 36 & 144 \\ 180 & 45 & 180 \\ 80 & 20 & 126 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1{,}6372 \\ 1{,}792 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 519{,}58 \\ 555{,}336 \\ 292{,}816 \end{Bmatrix} = 292\begin{Bmatrix} 1{,}7744 \\ 1{,}8965 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}190 & 36 & 144\\ 180 & 45 & 180\\ 80 & 20 & 126\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1,7744\\ 1,8965\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}569,41\\ 584,735\\ 305,882\end{Bmatrix}=305,882\begin{Bmatrix}1,7962\\ 1,912\\ 1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}190 & 36 & 144\\ 180 & 45 & 180\\ 80 & 20 & 126\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1,7962\\ 1,912\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}554,11\\ 589,356\\ 307,936\end{Bmatrix}=307,936\begin{Bmatrix}1,7994\\ 1,914\\ 1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}190 & 36 & 144\\ 180 & 45 & 180\\ 80 & 20 & 126\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1,7994\\ 1,914\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}554,79\\ 590,022\\ 308,232\end{Bmatrix}=308,232\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,9142\\ 1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}190 & 36 & 144\\ 180 & 45 & 180\\ 80 & 20 & 126\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,9142\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}554,9112\\ 590,139\\ 308,284\end{Bmatrix}=308,284\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,9143\\ 1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}190 & 36 & 144\\ 180 & 45 & 180\\ 80 & 20 & 126\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,9143\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}554,9148\\ 590,1435\\ 308,286\end{Bmatrix}=308,286\begin{Bmatrix}1,8\\ 1,9143\\ 1\end{Bmatrix}.$$

După 7 iterații se obține $\{\mu\}_1^T=\{1,8 \quad 1,9143 \quad 1\}$ cu 3 zecimale exacte pentru μ_{21}, iar pentru a se asigura această precizie s-a lucrat cu 4 zecimale, astfel încât eroarea absolută la determinarea coeficientului de distribuție μ_{21} este mai mică decât 10^{-4}. Pulsația proprie fundamentală se determină din condiția $\lambda_1=\dfrac{1}{p_1^2}$, astfel încât rezultă:

$$\frac{308,286}{46\omega_0^2}=\frac{1}{p_1^2},\quad p_1=0,386\,\omega_0\ .$$

Pentru a determina cea mai mare pulsație proprie p_3 și vectorul propriu corespunzător $\{\mu\}_3$ se fac iterații cu inversa matricei dinamice, pornind de la vectorul inițial $\{\mu^{(0)}\}^T=\{1 \quad -1 \quad 1\}$.

$$\begin{bmatrix} 9 & -7,2 & 0 \\ -36 & 54 & -36 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16,2 \\ -126 \\ 13 \end{Bmatrix} = 13 \begin{Bmatrix} 1,2462 \\ -9,7 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -7,2 & 0 \\ -36 & 54 & -36 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,2462 \\ -9,7 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 81,0558 \\ -604,66 \\ 47,8 \end{Bmatrix} = 47,8 \begin{Bmatrix} 1,696 \\ -12,65 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -7,2 & 0 \\ -36 & 54 & -36 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,696 \\ -12,65 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 106,344 \\ -780,156 \\ 59,6 \end{Bmatrix} = 59,6 \begin{Bmatrix} 1,7843 \\ -13,09 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -7,2 & 0 \\ -36 & 54 & -36 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,7843 \\ -13,09 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 110,3 \\ -807,1 \\ 61,36 \end{Bmatrix} = 61,36 \begin{Bmatrix} 1,7977 \\ -13,154 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -7,2 & 0 \\ -36 & 54 & -36 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,7977 \\ -13,154 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 110,888 \\ -811,033 \\ 61,616 \end{Bmatrix} = 61,616 \begin{Bmatrix} 1,8 \\ -13,163 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -7,2 & 0 \\ -36 & 54 & -36 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,8 \\ -13,163 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 110,9736 \\ -811,602 \\ 61,652 \end{Bmatrix} = 61,652 \begin{Bmatrix} 1,8 \\ -13,1643 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -7,2 & 0 \\ -36 & 54 & -36 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,8 \\ -13,163 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 110,983 \\ -811,670 \\ 61,6572 \end{Bmatrix} = 61,6572 \begin{Bmatrix} 1,8 \\ -13,1643 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Se obține $\{\mu\}_3^T = \{1,8 \quad -13,1643 \quad 1\}$ cu 3 zecimale exacte pentru μ_{23} , tot după 7 iterații, iar pentru pulsația proprie p_3 rezultă:

$$\lambda_3 = \frac{61,6572}{9}\omega_0^2 = 6,8508\omega_0^2 = p_3^2 , \quad p_3 = 2,6174\,\omega_0 .$$

Pentru a determina vectorul propriu $\{\mu\}_2$ se folosesc relaţiile de ortogonalitate ale acestuia cu ceilalţi doi vectori proprii determinaţi, care, pentru matricea de inerţie [m], se exprimă prin:

$$\{\mu\}_2^T[m]\{\mu\}_1 = 0\,, \quad \{\mu\}_2^T[m]\{\mu\}_3 = 0\,.$$

Considerând $\{\mu\}_2^T = \{\mu_{12} \quad \mu_{22} \quad 1\}$, se obţin ecuaţiile:

$$9\mu_{12} + 1{,}9143\mu_{22} + 9 = 0\,, \quad 9\mu_{12} - 13{,}1643\mu_{22} + 9 = 0\ ,$$

din care rezultă $\mu_{12} = -1$ şi $\mu_{22} = 0$. Pulsaţia proprie p_2 se poate determina cel mai uşor după o singură iteraţie cu matricea dinamică sau cu inversa ei, dar aici, pentru verificarea exactităţii calculelor, se foloseşte raportul lui Rayleigh:

$$p_2^2 = \frac{\{\mu\}_2^T[k]\{\mu\}_2}{\{\mu\}_2^T[m]\{\mu\}_2} = \frac{14k}{14m} = \omega_0^2\,, \quad p_2 = \omega_0\ .$$

4.3.2. În fig.4.3.2 este reprezentat modelul de translaţie al unui sistem vibrant linear cu 3 grade de libertate, pentru care se cunosc masele corpurilor aflate în mişcare de translaţie rectilinie pe verticală şi constantele elastice ale arcurilor elicoidale, precum şi $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Parametrii de poziţie independenţi x_1, x_2, x_3 se măsoară din poziţia de echilibru static a sistemului, în care arcul de constantă elastică 59k este nedeformat, iar f_1, f_2, f_3 sunt deplasările pe verticală ale corpurilor din poziţia în care celelalte arcuri sunt nedeformate până în poziţia de echilibru static a sistemului.

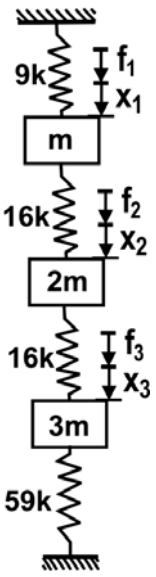


Fig. 4.3.2

a) Să se determine pulsaţia proprie fundamentală p_1 şi vectorul propriu corespunzător $\{\mu\}_1$ cu metoda iteraţiei matriceale, cu eroare absolută mai mică decât 10^{-4} pentru μ_{21}, pornind de la vectorul iniţial $\{\mu^{(0)}\}^T = \{1 \quad 1{,}14 \quad 1/3\}$.

b) Să se verifice că $\{\mu\}_2^T = \{1 \quad 0 \quad -1\}$ reprezintă transpusa celui de al doilea vector propriu şi să se afla valoarea exactă a pulsaţiei proprii corespunzătoare p_2.

c) Să se determine cel de al treilea vector propriu

$\{\mu\}_3$ pe baza relațiilor de ortogonalitate cu vectorii proprii cunoscuți şi apoi să se calculeze pulsația proprie corespunzătoare p_3 cu raportul lui Rayleigh.

d) Să se determine valorile vectorilor proprii $\{\mu\}_2$ şi $\{\mu\}_3$, şi ale pulsațiilor proprii corespunzătoare cu ajutorul matricelor de eliminare.

e) Să se determine valori aproximative ale pulsațiilor proprii p_1 şi p_2 cu ajutorul unei funcții spectrale.

f) Să se determine valori aproximative ale pulsației proprii fundamentale p_1 cu ajutorul metodei:

- Stodola ;
- raportului lui Rayleigh ;
- ecuației lui Rayleigh ;
- Dunkerley ;
- Dunkerley cu mărirea preciziei rezultatului.

Rezolvare

a) Din fig.4.3.2 se pot scrie direct matricele de inerție [m] şi de rigiditate [k], tinând cont de forma matriceală a expresiilor pătratice corespunzătoare energiei cinetice $E_c = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[m]\{\dot{x}\}$, respectiv energiei potențiale $E_p = \frac{1}{2}\{x\}^T[k]\{x\}$, :

$$[m] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad [k] = k\begin{bmatrix} 25 & -16 & 0 \\ -16 & 32 & -16 \\ 0 & -16 & 75 \end{bmatrix},$$

cu ajutorul cărora se calculează matricea dinamică:

$$[D] = [k]^{-1}[m] = \frac{1}{344\,\omega_0}\begin{bmatrix} 21{,}44 & 12 & 2{,}56 \\ 12 & 18{,}75 & 4 \\ 2{,}56 & 4 & 5{,}44 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{344\,\omega_0}\begin{bmatrix} 21{,}44 & 24 & 7.68 \\ 12 & 37{,}5 & 12 \\ 2{,}56 & 8 & 16{,}32 \end{bmatrix}.$$

Se efectuează iterații cu matricea dinamică, pornind de la vectorul inițial dat în enunț:

$$\begin{bmatrix} 21,44 & 24 & 7,68 \\ 12 & 37,5 & 12 \\ 2,56 & 8 & 16,32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,14 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 51,36 \\ 58,75 \\ 17,12 \end{Bmatrix} = 51,36 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,144 \\ 1/3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 21,44 & 24 & 7,68 \\ 12 & 37,5 & 12 \\ 2,56 & 8 & 16,32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,144 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 51,456 \\ 58,9 \\ 17,152 \end{Bmatrix} = 51,456 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,1447 \\ 1/3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 21,44 & 24 & 7,68 \\ 12 & 37,5 & 12 \\ 2,56 & 8 & 16,32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,1447 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 51,4728 \\ 58,9263 \\ 17,1576 \end{Bmatrix} = 51,4728 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,1448 \\ 1/3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 21,44 & 24 & 7,68 \\ 12 & 37,5 & 12 \\ 2,56 & 8 & 16,32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,1448 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 51,4752 \\ 58,93 \\ 17,1584 \end{Bmatrix} = 51,4752 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,1448 \\ 1/3 \end{Bmatrix}.$$

Se observă că după numai 4 iterații este asigurată precizia cerută în enunț pentru determinarea coeficientului de distribuție μ_{21}, ceilalți având valori exacte date în $\{\mu^{(0)}\}$. Ca urmare, rezultă:

$$\{\mu\}_1^T = \{1 \quad 1,1448 \quad 1/3\}, \quad \lambda_1 = \frac{51,4752}{344\omega_0^2} = \frac{1}{p_1^2}, \quad p_1 = 2,5851\,\omega_0 .$$

b) Dacă $\{\mu\}_r$ este un vector propriu al sistemului, atunci este satisfăcută relația matriceală:

$$[D]\{\mu\}_r = \lambda_r \{\mu\}_r, \quad \forall r = 1, 2, 3, \quad \lambda_r = \frac{1}{p_r^2} .$$

Pentru $\{\mu\}_2$ dat în enunț se obține:

$$\begin{bmatrix} 21,44 & 24 & 7,68 \\ 12 & 37,5 & 12 \\ 2,56 & 8 & 16,32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13,76 \\ 0 \\ -13,76 \end{Bmatrix} = 13,76 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} ,$$

astfel încât rezultă valoarea exactă:

$$\lambda_2 = \frac{13,76}{344\omega_0^2} = \frac{1}{25\omega_0^2} , \quad p_2 = 5\omega_0 .$$

c) Considerând $\{\mu\}_3^T = \{1 \quad \mu_{23} \quad \mu_{33}\}$ şi folosind relaţiile de ortogonalitate:

$$\{\mu\}_1^T [m] \{\mu\}_3 = 0 , \quad \{\mu\}_2^T [m] \{\mu\}_3 = 0 ,$$

se obţin ecuaţiile algebrice:

$$1 + 2,2896\mu_{23} + \mu_{33} = 0 , \quad 1 - 3\,\mu_{33} = 0 .$$

din care rezultă:

$$\mu_{23} = -0,5824 , \quad \mu_{33} = \frac{1}{3} .$$

Raportul lui Rayleigh pentru cel de al treilea mod de vibraţie este:

$$p_3^2 = \frac{\{\mu\}_3^T [k] \{\mu\}_3}{\{\mu\}_3^T [m] \{\mu\}_3} = \frac{69,0285k}{2,0115m} = 34,317\,\omega_0^2 ,$$

din care rezultă $p_3 = 5,858\,\omega_0 > p_2$.

d) Pentru eliminarea primului mod natural de vibraţie din matericea dinamică [D], în locul primului vector propriu normat $\{\mu\}_1$ se consideră $\{\mu'\}_1 = \alpha_1 \{\mu\}_1$, care se normează cu condiţia:

$$\{\mu'\}_1^T [m] \{\mu'\}_1 = 1 ,$$

din care rezultă $\alpha_1 = \dfrac{0,50287}{\sqrt{m}}$. Astfel, noul vector propriu normat pentru primul mod devine:

$$\{\mu'\}_1^T = \{0{,}50287 \quad 0{,}575686 \quad 0{,}167234\},$$

în care s-au considerat toate cifrele semnificative după virgulă, pentru mărirea preciziei calculelor. Matricea de eliminare a primului mod rezultă:

$$[D^{(1)}] = [D] - \lambda_1 \{\mu'\}_1 \{\mu'\}_1^T [m] = \frac{1}{344\omega_0^2} \begin{bmatrix} 8{,}423 & -5{,}804 & -5{,}337 \\ -2{,}902 & 3{,}381 & -2{,}902 \\ -1{,}779 & -1{,}935 & 11{,}981 \end{bmatrix}.$$

Aşa cum se ştie, oricare ar fi matricea pătrată [A] de ordinul n, se pot determina în principiu cei n vectori proprii $\{\mu\}_r$ din ecuațiile matriceale:

$$[A]\{\mu\}_r = \lambda_r \{\mu\}_r, \quad r = 1,...,n \tag{1}$$

dacă se pot determina cele n valori proprii λ_r din ecuația caracteristică:

$$|\lambda[I_n] - [A]| = P_n(\lambda) = 0 \tag{2}$$

Pentru $n \geq 3$ nu se pot determina uşor şi cu precizie ridicată cele n rădăcini ale ecuației caracteristice, astfel încât se efectuează iterații cu matricea [A], pornind de la un vector inițial $\{\mu^{(0)}\}$, care se exprimă întotdeauna ca o combinație lineară a vectorilor proprii:

$$\{\mu^{(0)}\} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \{\mu\}_r .$$

Se ştie că procesul iterativ este convergent către modul natural de vibrație pentru care valoarea proprie λ este cea mai mare, dar acest proces poate fi lent convergent, deci pot fi necesare foarte multe iterații pentru a se asigura precizia dorită a calculelor . Convergența procesului iterativ depinde în mare măsură de modul în care se alege vectorul inițial $\{\mu^{(0)}\}$, care trebuie să fie cât mai apropiat de vectorul propriu normat corespunzător modului cu valoarea proprie cea mai mare. Astfel, la punctul a) s-a dat în enunț acest vector inițial foarte apropiat de $\{\mu\}_1$, ceea ce face să se asigure precizia cerută după numai 4 iterații.

Revenind la matricea de eliminare $[D^{(1)}]$, după eliminarea primului mod rămâne λ_2 valoarea proprie cea mai mare. Dacă se începe procesul iterativ cu $\{\mu^{(0)}\}^T = \{1 \quad 1 \quad -1\}$, aşa cum se consideră vectorul inițial pentru modul al doilea de

vibraţie, atunci sunt necesare peste 20 de iteraţii pentru a obţine valorile exacte $\{\mu\}_2$ şi $\lambda_2 = \dfrac{1}{p_2^2}$. Deoarece $\{\mu\}_2$ dat în enunţ este vector propriu pentru matricea dinamică, el trebuie să fie vector propriu şi pentru matricea de eliminare $[D^{(1)}]$, astfel încât rezultă:

$$\begin{bmatrix} 8{,}423 & -5{,}804 & -5{,}337 \\ -2{,}902 & 3{,}381 & -2{,}902 \\ -1{,}779 & -1{,}935 & 11{,}981 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13{,}76 \\ 0 \\ -13{,}76 \end{Bmatrix} = 13{,}76 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix},$$

$$\lambda_2 = \frac{13{,}76}{344\beta\omega_2^2} = \frac{1}{p_2^2}, \quad p_2 = 5\omega_0 .$$

Pentru eliminarea şi a modului al doilea din $[D^{(1)}]$, se consideră $\{\mu'\}_2 = \alpha_2 \{\mu\}_2$, pentru care se impune condiţia de normare:

$$\{\mu'\}_2^T [m] \{\mu'\}_2 = 1 ,$$

din care rezultă $\alpha_2 = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{m}}$. Matricea de eliminare a celui de al doilea mod din $[D^{(1)}]$ devine:

$$[D^{(2)}] = [D^{(1)}] - \lambda_2 \{\mu'\}_2 \{\mu'\}_2^T [m] = \frac{1}{344\omega_0^2} \begin{bmatrix} 4{,}983 & -5{,}804 & -4{,}983 \\ -2{,}902 & 3{,}381 & -2{,}902 \\ -1{,}661 & -1{,}935 & 1{,}661 \end{bmatrix}.$$

astfel încât rezultă:

$$\begin{bmatrix} 4{,}983 & -5{,}804 & 4{,}983 \\ -2{,}902 & 3{,}381 & -2{,}902 \\ 1{,}661 & -1{,}935 & 1{,}661 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}5824 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10{,}02426 \\ -5{,}8384 \\ 3{,}34142 \end{Bmatrix} = 10{,}02426 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}5824 \\ 1/3 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{10{,}02426}{344\omega_0^2} = \frac{1}{p_3^2}, \quad p_3 = 5{,}858\omega_0 .$$

Se observă că, în principiu, folosind metoda iteraţiei matriceale cu matricea dinamică şi cu matricele de eliminare succesive ale modurilor precedente, se

pot determina toţi vectorii proprii şi toate pulsaţiile proprii pentru orice sistem vibrant linear, oricât de mare ar fi numărul său n de grade de libertate. Deoarece erorile de calcul se cumulează de la o matrice de eliminare la următoarea, pentru a se asigura o anumită precizie de calcul este necesar să se lucreze cu cât mai multe zecimale şi să se efectueze foarte multe iteraţii, ceea ce impune implementarea unui algoritm de calcul pentru un program pe calculator.

e) Ecuaţia caracteristică de forma (2), pentru n = 3 şi $[A]=[D']=344\omega_0^2[D]$, conduce la ecuaţia polinomială:

$$\lambda^3 - 75{,}26\lambda^2 + 1362{,}24\lambda - 7100{,}16 = 0\,, \qquad (3)$$

în care $\lambda = 344\dfrac{\omega_0^2}{p^2}$. Cele 3 rădăcini ale ecuaţiei caracteristice (3) se aşează în ordine descrescătoare $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$, corespunzător ordinei crescătoare a pulsaţiilor proprii $0 < p_1 < p_2 < p_3$. O funcţie spectrală din care se determină valori aproximative pentru primele 2 valori, respectiv pentru primele 2 pulsaţii proprii, se obţine din (3) luând în considerare numai primii 3 termeni. În acest caz se obţin valorile aproximative:

$$\lambda_1^a = 44{,}9633 < \lambda_1\,, \quad \lambda_2^a = 30{,}2967 > \lambda_2\,,$$

$$p_1^a = 2{,}766\omega_0 > p_1\,, \quad p_2^a = 3{,}3696\omega_0 < p_2\,,$$

care sunt în concordanţă cu teoria dezvoltată de S.A.Bernstein. Este necesar să se observe că valorile proprii exacte care rezultă din (3) sunt de $344\omega_0^2$ ori mai mari decât cele determinate la punctele precedente, doarece în locul matricei dinamice s-a considerat $[D']$.

f) Formula lui Stodola pentru determinarea unei valori aproximative a pulsaţiei fundamentale p_1 în cazul unui sistem cu 3 grade de libertate este:

$$p_1^a = \sqrt{\frac{g(m_1f_1 + m_2f_2 + m_3f_3)}{m_1f_1^2 + m_2f_2^2 + m_3f_3^2}}\,.$$

Pentru a determina deplasările corpurilor pe verticală până în poziţia de echilibru static a sistemului sub acţiunea greutăţilor proprii, se impun condiţiile de echilibru, care se pot exprima sub forma matriceală: $[k]\{f\} = \{m\}g$, unde {f} este

matricea coloană a acestor deplasări, iar {m} este matricea coloană a maselor corpurilor. De aici rezultă:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = [k]^{-1}\{m\}g = \frac{g}{344\omega_0^2}\begin{bmatrix} 21{,}44 & 12 & 2{,}56 \\ 12 & 18{,}75 & 4 \\ 2{,}56 & 4 & 5{,}44 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{g}{\omega_0^2}\begin{Bmatrix} 0{,}15442 \\ 0{,}17878 \\ 0{,}07814 \end{Bmatrix} .$$

Cu formula lui Stodola se obţine $p_1^a = 2{,}6525\,\omega_0 > p_1$, care este o valoare aproximativă mai apropiată de p_1 decât cea determinată anterior cu metoda funcţiei spectrale.

Pentru a aplica metoda raportului lui Rayleigh pentru primul mod natural de vibraţie, se consideră că o valoare aproximativă a primului vector propriu normat este:

$$\{\mu\}_1^a = \begin{Bmatrix} 1 \\ f_2/f_1 \\ f_3/f_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}15775 \\ 0{,}506 \end{Bmatrix} .$$

Cu această valoare aproximativă, care diferă de $\{\mu\}_1$ determinat la punctul a) se obţine:

$$p_1^a = \frac{\left(\{\mu\}_1^a\right)^T[k]\{\mu\}_1^a}{\left(\{\mu\}_1^a\right)^T[m]\{\mu\}_1^a} = \frac{31{,}300734\,k}{4{,}448878\,m} = 7{,}0356\omega_0^2 ,$$

de unde rezultă $p_1^a = 2{,}6525\omega_0$, aceeaşi valoare aproximativă ca şi cea determinată cu metoda lui Stodola.

Metoda ecuaţiei lui Rayleigh $(E_c)_{max} = (E_p)_{max}$ se poate aplica pentru determinarea oricărei pulsaţii proprii, dacă se cunosc amplitudinile vibraţiilor libere şi neamortizate ale sistemului, în cazul în care acesta vibrează după modul corespunzător de vibraţie. În cazul primului mod natural de vibraţie, se consideră că aceste amplitudini sunt proporţionale cu deplasările pe verticală ale corpurilor, sub acţiunea greutăţilor proprii, până în poziţia de echilibru static a sistemului. Cu această consideraţie, se poate scrie succesiv:

$$\{x\} = C\{f\}\cos(p_1 t + \varphi_1), \quad \{\dot{x}\} = -p_1 C\{f\}\sin(p_1 t + \varphi_1) ,$$

$$E_c = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[m]\{\dot{x}\} = \frac{1}{2}p_1^2 C^2\{f\}^T[m]\{f\}\sin^2(p_1 t + \varphi_1) ,$$

$$E_p = \frac{1}{2}\{x\}^T[k]\{x\} = \frac{1}{2}C^2\{f\}^T[k]\{f\}\cos^2(p_1 t + \varphi_1) .$$

Se observă că, aplicând ecuația lui Rayleigh şi simplificând cu f_I^2, se ajunge la acelaşi raport al lui Rayleigh pentru primul mod natural de vibrație, deci rezultă aceeaşi valoare aproximativă pentru p_1.

Metoda lui Dunkerley se bazează pe metoda funcției spectrale, care se obține luând în considerare numai primii doi termeni din ecuația caracteristică (3), deci rezultă:

$$\lambda_1^a = 75{,}26 > \lambda_1 , \quad p_1^a = 2{,}138\omega_0 < p_1 .$$

Cu această metodă, ținând seama şi de valoarea aproximativă obținută la punctul e), se poate stabili numai un interval în care se află pulsația proprie fundamentală sau valoarea proprie λ_1:

$$2{,}138\omega_0 < p_1 < 2{,}766\omega_0 , \quad 44{,}9633 < \lambda_1 < 75{,}26 \tag{4}$$

Pentru mărirea preciziei rezultatului, deci pentru restrângerea intervalelor (4), Dunkerley a observat că valoarea 75,26 a coeficientului lui λ^2 din (3) este suma $d_{11} + d_{22} + d_{33}$ a elementelor de pe diagonala principală a matricei $[D']$. De asemenea, pe baza relațiilor dintre răcini şi coeficienți într-o ecuație polinomială, se poate scrie:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = d_{11} + d_{22} + d_{33} .$$

Deoarece ecuația caracteristică (3) se obține din condiția ca toți determinanții ecuațiilor matriceale de forma (1), să fie nuli, pentru $[A] = [D']$ şi un vector arbitrar $\{\mu\}$ în locul vectorilor proprii, se mai poate exprima relația matriceală:

$$[D']\{\mu\} = \lambda\{\mu\} \tag{5}$$

Înmulțind ecuația (5) la stânga cu $[D']$ şi ținând seama de aceeaşi ecuație, se poate scrie succesiv:

$$[D']^2\{\mu\} = \lambda[D']\{\mu\} = \lambda^2\{\mu\}, \ldots, [D']^j\{\mu\} = \lambda^{j-1}[D']\{\mu\} = \lambda^j\{\mu\} .$$

Ultima ecuație conduce la o ecuație caracteristică tot de forma (3), dar valoarea aproximativă pentru λ_1 , determinată cu metoda lui Dunkerley din noua ecuație caracteristică, rezultă mai apropiată de cea reală decât valoarea 75,26 din (4). Notând cu $d_{11}^{(j)}, d_{22}^{(j)}, d_{33}^{(j)}$ elementele de pe diagonala principală a matricei $[D']^j$, această nouă valoare aproximativă şi suma rădăcinilor noii ecuații caracteristice devin:

$$\left(\lambda_1^a\right)_1 = \sqrt[j]{d_{11}^{(j)} + d_{22}^{(j)} + d_{33}^{(j)}} > \lambda_1 , \quad \lambda_1^j + \lambda_2^j + \lambda_3^j = d_{11}^{(j)} + d_{22}^{(j)} + d_{33}^{(j)} .$$

În mod asemănător se obţine:

$$\left(\lambda_1^a\right)_1 > \left(\lambda_1^a\right)_2 = \sqrt[2j]{d_{11}^{(2j)} + d_{22}^{(2j)} + d_{33}^{(2j)}} > \lambda_1 , \quad \lambda_1^{2j} + \lambda_2^{2j} + \lambda_3^{2j} = d_{11}^{(2j)} + d_{22}^{(2j)} + d_{33}^{(2j)}$$

Se mai poate determina o valoare aproximativă prin adaus pentru λ_1 , pe baza raportului:

$$\frac{\lambda_1^{2j} + \lambda_2^{2j} + \lambda_3^{2j}}{\lambda_1^{j} + \lambda_2^{j} + \lambda_3^{j}} = \lambda_1^j \frac{1 + (\lambda_2/\lambda_1)^{2j} + (\lambda_3/\lambda_1)^{2j}}{1 + (\lambda_2/\lambda_1)^{j} + (\lambda_3/\lambda_1)^{j}} = \frac{d_{11}^{(2j)} + d_{22}^{(2j)} + d_{33}^{(2j)}}{d_{11}^{(j)} + d_{22}^{(j)} + d_{33}^{(j)}} .$$

Deoarece $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ şi $\lambda_3/\lambda_1 < 1$, se observă că numărătorul factorului lui λ_1^j este mai mic decât numitorul, astfel încât rezultă:

$$\left(\lambda_1^a\right)_3 = \sqrt[j]{\frac{d_{11}^{(2j)} + d_{22}^{(2j)} + d_{33}^{(2j)}}{d_{11}^{(j)} + d_{22}^{(j)} + d_{33}^{(j)}}} < \lambda_1 .$$

Ca urmare, pentru restrângerea intervalelor (4), se pot folosi relaţiile:

$$\sqrt{\frac{344}{\left(\lambda_1^a\right)_2}}\omega_0 < p_1 < \sqrt{\frac{344}{\left(\lambda_1^a\right)_3}}\omega_0 , \quad \left(\lambda_1^a\right)_3 < \lambda_1 < \left(\lambda_1^a\right)_2 .$$

Intervalele de valori pentru p_1 şi λ_1 , date de aceste relaţii, pot fi făcute oricât de mici, dacă se ia j suficient de mare.

Pentru sistemul considerat se va lua numai j = 2, deoarece pentru valori mai mari creşte foarte mult volumul de calcul, care nu se poate efectua cu precizie ridicată decât prin programe de calculator. Pătratul matricei $[D']$ devine:

$$[D']^2 = \begin{bmatrix} 21{,}44 & 24 & 7{,}68 \\ 12 & 37{,}5 & 12 \\ 2{,}56 & 8 & 16{,}32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21{,}44 & 24 & 7{,}68 \\ 12 & 37{,}5 & 12 \\ 2{,}56 & 8 & 16{,}32 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 767{,}3344 & 1476 & 577{,}9968 \\ 738 & 1790{,}25 & 738 \\ 192{,}6656 & 492 & 382{,}0032 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă:

$$d_{11}^{(2)} = 767{,}3344 ; \; d_{22}^{(2)} = 1790{,}25 ; \; d_{33}^{(2)} = 382{,}0032 ; \quad ,$$

$$\left(\lambda_1^a\right)_1 = 54{,}2 > \lambda_1 \qquad \text{dar} \qquad \left(\lambda_1^a\right)_1 < 75{,}26 .$$

În mod asemănător, ridicând încă odată la pătrat matricea $[D']^2$, se obţin valorile:

$$d_{11}^{(4)} = 1789450{,}2\,;\ d_{22}^{(4)} = 4657379{,}1\,;\ d_{33}^{(4)} = 620382{,}55\,;$$
$$\left(\lambda_1^a\right)_2 = 51{,}56 > \lambda_1\,;\ \left(\lambda_1^a\right)_3 = 49{,}032 < \lambda_1$$

Ca urmare, chiar şi pentru această valoare mică a lui j se obțin intervale de valori suficient de restrânse pentru p_1 şi λ_1 :

$$2{,}583\omega_0 < p_1 < 2{,}6487\omega_0\,,\quad 49{,}032 < \lambda_1 < 51{,}56\,,$$

observându-se că valorile cele mai apropiate de valorile exacte sunt cea inferioară pentru p_1 şi cea superioară pentru λ_1.

4.3.3 – 4.3.56. În fig.4.3.3 este reprezentat modelul de translație cel mai general pentru un sistem vibrant linear cu 3 grade de libertate, pentru care se cunosc masele corpurilor aflate în mişcare de translație rectilinie pe verticală şi constantele elastice ale arcurilor elicoidale, date în tabelul 4.3.1-a, precum şi $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

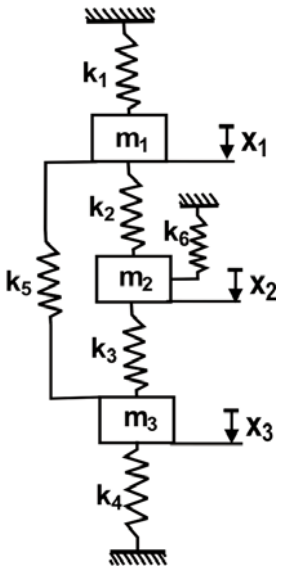


Fig. 4.3.3

a) Să se determine pulsația proprie fundamentală p_1 şi vectorul propriu corespunzător $\{\mu\}_1$ cu metoda iterației matriceale, pornind de la vectorul inițial $\{\mu^{(0)}\}$, dat în tabelul 4.3.1-b.

b) Să se verifice că $\{\mu\}_2$ dat în tabelul 4.3.1-b este un vector propriu al sistemului şi să se afle pulsația proprie corespunzătoare p_2.

c) Să se determine celălalt vector propriu $\{\mu\}_3$ pe baza relațiilor de ortogonalitate cu vectorii proprii cunoscuți şi apoi să se calculeze pulsația proprie corespunzătoare p_3 cu raportul lui Rayleigh.

Răspunsurile la problemele 4.3.3 – 4.3.56, şi anume: matricea dinamică [D], pulsațiile proprii p_r (r = 1, 2, 3) şi matricea modală normată [μ], sunt date în tabelul 4.3.2.

Tabelul 4.3.1-a

Nr. probl.	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	m_1	m_2	m_3
4.3.3	2k	k	k	2k	k	2k	3m	$\frac{19}{18}$m	3m
4.3.4	k	k	k	k	k	k	2m	$\frac{23}{120}$m	2m
4.3.5	5k	2k	2k	5k	2k	6k	11m	$\frac{9}{5}$m	11m
4.3.6	4k	3k	3k	4k	3k	4k	m	2m	m
4.3.7	60k	60k	80k	100k	20k	80k	3m	m	2m
4.3.8	k	3k	3k	k	3k	0	m	$\frac{5}{2}$m	m
4.3.9	3k	2k	2k	3k	k	0	m	2m	m
4.3.10	30k	$\frac{15}{2}$k	$\frac{15}{2}$k	30k	$\frac{15}{2}$k	0	25m	6m	25m
4.3.11	28k	7k	7k	28k	7k	0	25m	6m	25m
4.3.12	90k	10k	10k	90k	10k	0	75m	12m	75m
4.3.13	27k	3k	3k	27k	3k	0	25m	4m	25m
4.3.14	27k	12k	12k	27k	12k	0	$\frac{13}{5}$m	$\frac{8}{13}$m	$\frac{13}{5}$m
4.3.15	63k	28k	28k	63k	28k	0	$\frac{13}{3}$m	$\frac{40}{39}$m	$\frac{13}{3}$m
4.3.16	117k	52k	52k	117k	52k	0	$\frac{169}{3}$m	$\frac{40}{3}$m	$\frac{169}{3}$m
4.3.17	16k	9k	9k	16k	9k	0	$\frac{25}{7}$m	$\frac{18}{25}$m	$\frac{25}{7}$m
4.3.18	64k	36k	36k	64k	36k	0	$\frac{25}{7}$m	$\frac{18}{25}$m	$\frac{25}{7}$m
4.3.19	400k	225k	225k	400k	225k	0	1075m	$\frac{5418}{25}$m	1075m

4.3.20	688k	387k	387k	688k	387k	0	625m	126m	625m
4.3.21	400k	225k	225k	400k	225k	0	625m	126m	625m
4.3.22	1600k	900k	900k	1600k	900k	0	25m	$\frac{126}{25}$m	25m
4.3.23	100k	100k	100k	100k	100k	0	40m	42m	40m
4.3.24	60k	120k	120k	60k	60k	0	9m	10m	9m
4.3.25	15k	30k	30k	15k	15k	0	3m	$\frac{10}{3}$m	3m
4.3.26	300k	600k	600k	300k	300k	0	18m	20m	18m
4.3.27	40k	60k	60k	40k	20k	0	25m	24m	25m
4.3.28	14k	21k	21k	14k	7k	0	100m	96m	100m
4.3.29	400k	600k	600k	400k	200k	0	5m	$\frac{24}{5}$m	5m
4.3.30	693k	924k	924k	693k	231k	0	49m	44m	49m
4.3.31	525k	700k	700k	525k	175k	0	7m	$\frac{44}{7}$m	7m
4.3.32	27k	36k	36k	27k	9k	0	14m	$\frac{88}{7}$m	14m
4.3.33	180k	225k	225k	180k	45k	0	$\frac{81}{70}$m	m	$\frac{81}{70}$m
4.3.34	44k	55k	55k	44k	11k	0	81m	70m	81m
4.3.35	19600k	24500k	24500k	19600k	4900k	0	18m	$\frac{140}{9}$m	18m
4.3.36	150k	480k	320k	160k	120k	0	$\frac{6}{5}$m	$\frac{5}{2}$m	$\frac{3}{2}$m
4.3.37	3k	2k	2k	3k	0	0	m	2m	m
4.3.38	2k	$\frac{1}{2}$k	$\frac{1}{2}$k	2k	0	0	25m	6m	25m

4.3.39	4k	k	k	4k	0	0	5m	$\frac{6}{5}$m	5m
4.3.40	3k	$\frac{1}{3}$k	$\frac{1}{3}$k	3k	0	0	10m	$\frac{8}{5}$m	10m
4.3.41	9k	k	k	9k	0	0	$\frac{25}{2}$m	2m	$\frac{25}{2}$m
4.3.42	9k	4k	4k	9k	0	0	13m	$\frac{40}{13}$m	13m
4.3.43	39k	$\frac{52}{3}$k	$\frac{52}{3}$k	39k	0	0	169m	40m	169m
4.3.44	k	$\frac{4}{9}$k	$\frac{4}{9}$k	k	0	0	$\frac{13}{15}$m	$\frac{8}{39}$m	$\frac{13}{15}$m
4.3.45	4k	2k	4k	10k	0	0	10m	3m	10m
4.3.46	8k	2k	2k	8k	0	0	m	$\frac{12}{25}$m	m
4.3.47	k	4k	4k	k	0	0	19m	96m	19m
4.3.48	1600k	1100k	900k	1300k	0	0	$\frac{3}{5}$m	$\frac{4}{5}$m	$\frac{2}{5}$m
4.3.49	3k	k	k	0	0	0	4m	2m	m
4.3.50	7k	5k	3k	0	0	0	$\frac{7}{6}$m	m	m
4.3.51	60k	10k	5k	0	0	0	10m	5m	2m
4.3.52	k	2k	2k	0	0	0	5m	2m	m
4.3.53	24k	10k	10k	0	0	0	10m	10m	10m
4.3.54	k	2k	k	0	0	0	$\frac{6}{5}$m	3m	2m
4.3.55	$\frac{9}{5}$k	2k	$\frac{3}{2}$k	0	0	0	$\frac{38}{27}$m	$\frac{5}{4}$m	m
4.3.56	72k	72k	6k	0	0	0	9m	3m	m

Tabelul 4.3.1-b

Nr. probl.	$\{\mu^{(0)}\}^T$	$\{\mu\}_2^T$
4.3.3	$\{1 \quad 0{,}5 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.4	$\{1 \quad 0{,}6 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.5	$\{1 \quad 0{,}4 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.6	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad -0{,}72 \quad 1\}$
4.3.7	$\{1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}4\}$	$\{1 \quad -1{,}13 \quad -2{,}62\}$
4.3.8	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\left\{1 \quad -\frac{2}{3} \quad 1\right\}$
4.3.9	$\{1 \quad 1{,}75 \quad 1\}$	$\left\{1 \quad -\frac{1}{2} \quad 1\right\}$
4.3.10	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.11	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.12	$\{1 \quad 2 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.13	$\{1 \quad 2 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.14	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.15	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.16	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.17	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.18	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.19	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$

4.3.20	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.21	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.22	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.23	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\left\{1 \quad -\frac{4}{3} \quad -1\right\}$
4.3.24	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.25	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.26	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.27	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.28	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.29	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.30	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.31	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.32	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.33	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.34	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.35	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.36	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 1{,}06 \quad -3\}$
4.3.37	$\{1 \quad 1{,}75 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.38	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$

4.3.39	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.40	$\{1 \quad 2 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.41	$\{1 \quad 2 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.42	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.43	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.44	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.45	$\{1 \quad 0,7 \quad 0,3\}$	$\{1 \quad -2 \quad -2\}$
4.3.46	$\{1 \quad 2 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.47	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.48	$\{1 \quad 1,5 \quad 0,9\}$	$\{1 \quad -0,211 \quad -0,774\}$
4.3.49	$\{1 \quad 2 \quad 4\}$	$\{1 \quad 0 \quad -1\}$
4.3.50	$\{1 \quad 2 \quad 3\}$	$\{1 \quad 1 \quad -1\}$
4.3.51	$\{1 \quad 5 \quad 9\}$	$\{1 \quad 3 \quad -5\}$
4.3.52	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$	$\{1 \quad -1 \quad -2\}$
4.3.53	$\{1 \quad 3 \quad 4\}$	$\{1 \quad 1,2835 \quad -1,1495\}$
4.3.54	$\{1 \quad 1 \quad 1,5\}$	$\{1 \quad 1 \quad -1,5\}$
4.3.55	$\{1 \quad 1,5 \quad 2\}$	$\{1 \quad 0,4273 \quad -1,0815\}$
4.3.56	$\{1 \quad 1 \quad 4\}$	$\{1 \quad 1 \quad -3\}$

Tabelul 4.3.2.

Nr. probl.	[D]	p_r	[μ]
4.3.3	$\frac{1}{180\omega_0^2}\begin{bmatrix}162 & 19 & 54\\ 54 & 57 & 54\\ 54 & 19 & 162\end{bmatrix}$	$p_1=\sqrt{\frac{15}{19}}\omega_0=0{,}888\omega_0$ $p_2=\sqrt{\frac{5}{3}}\omega_0=1{,}291\omega_0$ $p_3=2\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0{,}632 & 0 & -9\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.4	$\frac{1}{480\omega_0^2}\begin{bmatrix}480 & 23 & 240\\ 240 & 46 & 240\\ 240 & 23 & 480\end{bmatrix}$	$p_1=\sqrt{\frac{15}{23}}\omega_0=0{,}8\omega_0$ $p_2=\sqrt{2}\omega_0=1{,}414\omega_0$ $p_3=4\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0{,}696 & 0 & -30\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.5	$\frac{1}{310\omega_0^2}\begin{bmatrix}430 & 18 & 120\\ 110 & 63 & 110\\ 120 & 18 & 430\end{bmatrix}$	$p_1=\frac{\sqrt{5}}{3}\omega_0=0{,}745\omega_0$ $p_2=\omega_0$ $p_3=\sqrt{\frac{62}{11}}\omega_0=2{,}374\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 4/9 & 0 & -27{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.6	$\frac{1}{52\omega_0^2}\begin{bmatrix}7 & 6 & 3\\ 4 & 14 & 3\\ 3 & 6 & 7\end{bmatrix}$	$p_1=1{,}685\omega_0$ $p_2=3{,}026\omega_0$ $p_3=\sqrt{13}\omega_0=3{,}606\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}387 & -0{,}72 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$
4.3.7	$\frac{1}{1066\omega_0^2}\begin{bmatrix}28{,}2 & 3{,}4 & 4{,}6\\ 10{,}2 & 6{,}9 & 6{,}2\\ 6{,}9 & 3{,}1 & 13{,}6\end{bmatrix}$	$p_1=5{,}76\omega_0$ $p_2=9{,}31\omega_0$ $p_3=16\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0{,}518 & -1{,}13 & -11\\ 0{,}46 & -2{,}62 & 2{,}9\end{bmatrix}$
4.3.8	$\frac{1}{60\omega_0^2}\begin{bmatrix}33 & 75 & 27\\ 30 & 100 & 30\\ 27 & 75 & 33\end{bmatrix}$	$p_1=0{,}632\omega_0$ $p_2=\sqrt{6}\omega_0=2{,}449\omega_0$ $p_3=\sqrt{10}\omega_0=3{,}162\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}2 & -2/3 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$
4.3.9	$\frac{1}{42\omega_0^2}\begin{bmatrix}10 & 14 & 4\\ 7 & 35 & 7\\ 4 & 14 & 10\end{bmatrix}$	$p_1=\omega_0$ $p_2=\sqrt{6}\omega_0=2{,}449\omega_0$ $p_3=\sqrt{7}\omega_0=2{,}646\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -0{,}5 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$
4.3.10	$\frac{1}{420\omega_0^2}\begin{bmatrix}275 & 42 & 75\\ 175 & 210 & 175\\ 75 & 42 & 275\end{bmatrix}$	$p_1=\omega_0$ $p_2=1{,}449\omega_0$ $p_3=\sqrt{3}\omega_0=1{,}732\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 5/3 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.3.11	$\frac{1}{392\omega_0}\begin{bmatrix}275 & 42 & 75\\ 175 & 210 & 175\\ 75 & 42 & 275\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}966\omega_0$ $p_2 = 1{,}4\omega_0$ $p_3 = 1{,}673\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 5/3 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.12	$\frac{1}{240\omega_0^2}\begin{bmatrix}175 & 16 & 25\\ 100 & 160 & 100\\ 25 & 16 & 175\end{bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$ $p_2 = 1{,}265\omega_0$ $p_3 = \sqrt{2}\omega_0 = 1{,}414\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2{,}5 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.13	$\frac{1}{216\omega_0^2}\begin{bmatrix}175 & 16 & 25\\ 100 & 160 & 100\\ 25 & 16 & 175\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}949\omega_0$ $p_2 = 1{,}2\omega_0$ $p_3 = 1{,}342\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2{,}5 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.14	$\frac{1}{2457\omega_0}\begin{bmatrix}169 & 28 & 67{,}6\\ 118{,}3 & 91 & 118{,}3\\ 67{,}6 & 28 & 169\end{bmatrix}$	$p_1 = 3\omega_0$ $p_2 = 4{,}922\omega_0$ $p_3 = 3\sqrt{5}\omega_0 = 6{,}708\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}3 & 0 & -6{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.15	$\frac{1}{3439{,}8\omega_0^2}\begin{bmatrix}169 & 28 & 67{,}6\\ 118{,}3 & 91 & 118{,}3\\ 67{,}6 & 28 & 169\end{bmatrix}$	$p_1 = 3{,}55\omega_0$ $p_2 = 5{,}824\omega_0$ $p_3 = 3\sqrt{7}\omega_0 = 7{,}937\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}3 & 0 & -6{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.16	$\frac{1}{491{,}4\omega_0^2}\begin{bmatrix}169 & 28 & 67{,}6\\ 118{,}3 & 91 & 118{,}3\\ 67{,}6 & 28 & 169\end{bmatrix}$	$p_1 = 1{,}342\omega_0$ $p_2 = 2{,}2\omega_0$ $p_3 = 3\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}3 & 0 & -6{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.17	$\frac{1}{2408\omega_0^2}\begin{bmatrix}368{,}75 & 54{,}18 & 168{,}75\\ 268{,}75 & 150{,}5 & 268{,}75\\ 168{,}75 & 54{,}18 & 368{,}75\end{bmatrix}$	$p_1 = 2\omega_0$ $p_2 = 3{,}47\omega_0$ $p_3 = 2\sqrt{7}\omega_0 = 5{,}29\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 25/21 & 0 & -25/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.18	$\frac{1}{9632\omega_0^2}\begin{bmatrix}368{,}75 & 54{,}18 & 168{,}75\\ 268{,}75 & 150{,}5 & 268{,}75\\ 168{,}75 & 54{,}18 & 368{,}75\end{bmatrix}$	$p_1 = 4\omega_0$ $p_2 = 6{,}94\omega_0$ $p_3 = 4\sqrt{7}\omega_0 = 10{,}58\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 25/21 & 0 & -25/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.19	$\frac{1}{200\omega_0^2}\begin{bmatrix}368{,}75 & 54{,}18 & 168{,}75\\ 268{,}75 & 150{,}5 & 268{,}75\\ 168{,}75 & 54{,}18 & 368{,}75\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}57\omega_0$ $p_2 = \omega_0$ $p_3 = 1{,}525\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 25/21 & 0 & -25/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.3.20	$\frac{1}{591{,}68\omega_0^2}\begin{bmatrix}368{,}75 & 54{,}18 & 168{,}75\\ 268{,}75 & 150{,}5 & 268{,}75\\ 168{,}75 & 54{,}18 & 368{,}75\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}99\omega_0$ $p_2 = 1{,}72\omega_0$ $p_3 = 2{,}623\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 25/21 & 0 & -25/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.21	$\frac{1}{344\omega_0^2}\begin{bmatrix}368{,}75 & 54{,}18 & 168{,}75\\ 268{,}75 & 150{,}5 & 268{,}75\\ 168{,}75 & 54{,}18 & 368{,}75\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}756\omega_0$ $p_2 = 1{,}3115\omega_0$ $p_3 = 2\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 25/21 & 0 & -25/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.22	$\frac{1}{34400\omega_0^2}\begin{bmatrix}368{,}75 & 54{,}18 & 168{,}75\\ 268{,}75 & 150{,}5 & 268{,}75\\ 168{,}75 & 54{,}18 & 368{,}75\end{bmatrix}$	$p_1 = 7{,}56\omega_0$ $p_2 = 13{,}11\omega_0$ $p_3 = 20\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 25/21 & 0 & -25/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.23	$\frac{1}{100\omega_0^2}\begin{bmatrix}25 & 21 & 15\\ 20 & 42 & 20\\ 15 & 21 & 25\end{bmatrix}$	$p_1 = 1{,}196\omega_0$ $p_2 = 2{,}887\omega_0$ $p_3 = \sqrt{10}\omega_0 = 3{,}162\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 10/7 & -4/3 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$
4.3.24	$\frac{1}{60\omega_0^2}\begin{bmatrix}5{,}4 & 5 & 3{,}6\\ 4{,}5 & 7{,}5 & 4{,}5\\ 3{,}6 & 5 & 5{,}4\end{bmatrix}$	$p_1 = 2\omega_0$ $p_2 = 5{,}77\omega_0$ $p_3 = 6{,}325\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}2 & 0 & -1{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.25	$\frac{1}{45\omega_0^2}\begin{bmatrix}5{,}4 & 5 & 3{,}6\\ 4{,}5 & 7{,}5 & 4{,}5\\ 3{,}6 & 5 & 5{,}4\end{bmatrix}$	$p_1 = \sqrt{3}\omega_0 = 1{,}732\omega_0$ $p_2 = 5\omega_0$ $p_3 = 5{,}477\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}2 & 0 & -1{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.26	$\frac{1}{150\omega_0^2}\begin{bmatrix}5{,}4 & 5 & 3{,}6\\ 4{,}5 & 7{,}5 & 4{,}5\\ 3{,}6 & 5 & 5{,}4\end{bmatrix}$	$p_1 = \sqrt{10}\omega_0 = 3{,}162\omega_0$ $p_2 = 9{,}13\omega_0$ $p_3 = 10\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}2 & 0 & -1{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.27	$\frac{1}{560\omega_0^2}\begin{bmatrix}225 & 168 & 125\\ 175 & 280 & 175\\ 125 & 168 & 225\end{bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$ $p_2 = 2{,}366\omega_0$ $p_3 = 2\sqrt{2}\omega_0 = 2{,}828\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}25 & 0 & -5/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.28	$\frac{1}{49\omega_0^2}\begin{bmatrix}225 & 168 & 125\\ 175 & 280 & 175\\ 125 & 168 & 225\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}296\omega_0$ $p_2 = 0{,}7\omega_0$ $p_3 = 0{,}837\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}25 & 0 & -5/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.3.29	$\frac{1}{28000\omega_0^2}\begin{bmatrix}225 & 168 & 125\\ 175 & 280 & 175\\ 125 & 168 & 225\end{bmatrix}$	$p_1 = 7{,}071\omega_0$ $p_2 = 16{,}733\omega_0$ $p_3 = 20\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}25 & 0 & -5/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.30	$\frac{1}{12474\omega_0^2}\begin{bmatrix}588 & 396 & 294\\ 441 & 693 & 441\\ 294 & 396 & 588\end{bmatrix}$	$p_1 = 3\omega_0$ $p_2 = 6{,}514\omega_0$ $p_3 = 8{,}124\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 14/11 & 0 & -1{,}75\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.31	$\frac{1}{66150\omega_0^2}\begin{bmatrix}588 & 396 & 294\\ 441 & 693 & 441\\ 294 & 396 & 588\end{bmatrix}$	$p_1 = 6{,}9\omega_0$ $p_2 = 15\omega_0$ $p_3 = 18{,}7\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 14/11 & 0 & -1{,}75\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.32	$\frac{1}{1701\omega_0^2}\begin{bmatrix}588 & 396 & 294\\ 441 & 693 & 441\\ 294 & 396 & 588\end{bmatrix}$	$p_1 = 1{,}108\omega_0$ $p_2 = 2{,}405\omega_0$ $p_3 = 3\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 14/11 & 0 & -1{,}75\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.33	$\frac{1}{2772\omega_0^2}\begin{bmatrix}12{,}15 & 7{,}7 & 5{,}67\\ 8{,}91 & 13{,}86 & 8{,}91\\ 5{,}67 & 7{,}7 & 12{,}15\end{bmatrix}$	$p_1 = 10\omega_0$ $p_2 = 20{,}683\omega_0$ $p_3 = 26{,}458\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 9/7 & 0 & -1{,}8\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.34	$\frac{1}{9{,}68\omega_0^2}\begin{bmatrix}12{,}15 & 7{,}7 & 5{,}67\\ 8{,}91 & 13{,}86 & 8{,}91\\ 5{,}67 & 7{,}7 & 12{,}15\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}59\omega_0$ $p_2 = \frac{11}{9}\omega_0 = 1{,}222\omega_0$ $p_3 = 1{,}563\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 9/7 & 0 & -1{,}8\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.35	$\frac{1}{19404\omega_0^2}\begin{bmatrix}12{,}15 & 7{,}7 & 5{,}67\\ 8{,}91 & 13{,}86 & 8{,}91\\ 5{,}67 & 7{,}7 & 12{,}15\end{bmatrix}$	$p_1 = 26{,}46\omega_0$ $p_2 = 54{,}72\omega_0$ $p_3 = 70\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 9/7 & 0 & -1{,}8\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.36	$\frac{1}{96576\omega_0^2}\begin{bmatrix}453{,}12 & 816 & 374{,}4\\ 391{,}68 & 1089 & 446{,}4\\ 299{,}52 & 744 & 554{,}4\end{bmatrix}$	$p_1 = 7{,}36\omega_0$ $p_2 = 22{,}3\omega_0$ $p_3 = 28\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}186 & 1{,}06 & -0{,}415\\ 0{,}963 & -3 & 0{,}022\end{bmatrix}$
4.3.37	$\frac{1}{30\omega_0^2}\begin{bmatrix}8 & 10 & 2\\ 5 & 25 & 5\\ 2 & 10 & 8\end{bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$ $p_2 = \sqrt{5}\omega_0 = 2{,}236\omega_0$ $p_3 = \sqrt{6}\omega_0 = 2{,}449\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -0{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.3.38	$\frac{1}{4\omega_0^2}\begin{bmatrix}45 & 6 & 5\\ 25 & 30 & 25\\ 5 & 6 & 45\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}258\omega_0$ $p_2 = 0{,}316\omega_0$ $p_3 = 0{,}447\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 5/3 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.39	$\frac{1}{40\omega_0^2}\begin{bmatrix}45 & 6 & 5\\ 25 & 30 & 25\\ 5 & 6 & 45\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}816\omega_0$ $p_2 = \omega_0$ $p_3 = \sqrt{2}\omega_0 = 1{,}414\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 5/3 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.40	$\frac{1}{30\omega_0^2}\begin{bmatrix}95 & 8 & 5\\ 50 & 80 & 50\\ 5 & 8 & 95\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}5\omega_0$ $p_2 = 0{,}577\omega_0$ $p_3 = 0{,}707\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2{,}5 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.41	$\frac{1}{72\omega_0^2}\begin{bmatrix}95 & 8 & 5\\ 50 & 80 & 50\\ 5 & 8 & 95\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}775\omega_0$ $p_2 = 0{,}894\omega_0$ $p_3 = 1{,}095\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2{,}5 & 0 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.42	$\frac{1}{234\omega_0^2}\begin{bmatrix}286 & 40 & 52\\ 169 & 130 & 169\\ 52 & 40 & 286\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}775\omega_0$ $p_2 = \omega_0$ $p_3 = \sqrt{3}\omega_0 = 1{,}732\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}3 & 0 & -6{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.43	$\frac{1}{78\omega_0^2}\begin{bmatrix}286 & 40 & 52\\ 169 & 130 & 169\\ 52 & 40 & 286\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}447\omega_0$ $p_2 = 0{,}577\omega_0$ $p_3 = \omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}3 & 0 & -6{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.44	$\frac{1}{390\omega_0^2}\begin{bmatrix}286 & 40 & 52\\ 169 & 130 & 169\\ 52 & 40 & 286\end{bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$ $p_2 = 1{,}291\omega_0$ $p_3 = 2{,}236\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}3 & 0 & -6{,}5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.45	$\frac{1}{88\omega_0^2}\begin{bmatrix}170 & 21 & 20\\ 70 & 63 & 60\\ 20 & 18 & 80\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}68\omega_0$ $p_2 = \omega_0$ $p_3 = 1{,}6\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0{,}688 & -2 & -9{,}7\\ 0{,}294 & -2 & 3{,}41\end{bmatrix}$
4.3.46	$\frac{1}{400\omega_0^2}\begin{bmatrix}45 & 12 & 5\\ 25 & 60 & 25\\ 5 & 12 & 45\end{bmatrix}$	$p_1 = \sqrt{5}\omega_0 = 2{,}236\omega_0$ $p_2 = \sqrt{10}\omega_0 = 3{,}162\omega_0$ $p_3 = 3{,}65\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2{,}5 & 0 & -5/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

4.3.47	$\frac{1}{190\omega_0^2}\begin{bmatrix}114 & 480 & 76\\ 95 & 600 & 95\\ 76 & 480 & 114\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}5\omega_0$ $p_2 = \sqrt{5}\omega_0 = 2{,}236\omega_0$ $p_3 = 2{,}517\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 19/16 & 0 & -1/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4.3.48	$\frac{1}{35155\omega_0^2}\begin{bmatrix}10{,}77 & 9{,}68 & 1{,}98\\ 7{,}26 & 23{,}76 & 4{,}86\\ 2{,}97 & 9{,}72 & 8{,}38\end{bmatrix}$	$p_1 = 34\omega_0$ $p_2 = 69{,}9\omega_0$ $p_3 = 80{,}32\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}82 & -0{,}211 & -1{,}065\\ 0{,}944 & -0{,}774 & 2{,}519\end{bmatrix}$
4.3.49	$\frac{1}{3\omega_0^2}\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 4 & 8 & 4\\ 4 & 8 & 7\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}458\omega_0$ $p_2 = \omega_0$ $p_3 = 1{,}338\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3{,}162 & 0 & -3{,}162\\ 4 & -1 & 4\end{bmatrix}$
4.3.50	$\frac{1}{210\omega_0^2}\begin{bmatrix}35 & 30 & 30\\ 35 & 72 & 72\\ 35 & 72 & 142\end{bmatrix}$	$p_1 = 1{,}027\omega_0$ $p_2 = \sqrt{6}\omega_0 = 2{,}229\omega_0$ $p_3 = 3{,}76\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2{,}154 & 1 & -0{,}92\\ 3{,}32 & -1 & 0{,}246\end{bmatrix}$
4.3.51	$\frac{1}{60\omega_0^2}\begin{bmatrix}10 & 5 & 2\\ 10 & 35 & 14\\ 10 & 35 & 38\end{bmatrix}$	$p_1 = \omega_0$ $p_2 = 2\omega_0$ $p_3 = 2{,}74\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 3 & -0{,}5\\ 10 & -5 & 0{,}25\end{bmatrix}$
4.3.52	$\frac{1}{2\omega_0^2}\begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\ 10 & 6 & 3\\ 10 & 6 & 4\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}339\omega_0$ $p_2 = \omega_0$ $p_3 = 1{,}867\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}213 & -1 & -7{,}213\\ 1{,}287 & -2 & 9{,}713\end{bmatrix}$
4.3.53	$\frac{1}{12\omega_0^2}\begin{bmatrix}5 & 5 & 5\\ 5 & 17 & 17\\ 5 & 17 & 29\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}53\omega_0$ $p_2 = 1{,}455\omega_0$ $p_3 = 2\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3{,}1165 & 1{,}2835 & -0{,}6\\ 4{,}3495 & -1{,}1495 & 0{,}2\end{bmatrix}$
4.3.54	$\frac{1}{10\omega_0^2}\begin{bmatrix}12 & 30 & 20\\ 12 & 45 & 30\\ 12 & 45 & 50\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}33\omega_0$ $p_2 = 0{,}913\omega_0$ $p_3 = 1{,}748\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}4346 & 1 & -0{,}3346\\ 1{,}8346 & -1{,}5 & 0{,}0654\end{bmatrix}$
4.3.55	$\frac{1}{1944\omega_0^2}\begin{bmatrix}1520 & 1350 & 1080\\ 1520 & 2565 & 2052\\ 1520 & 2565 & 3348\end{bmatrix}$	$p_1 = 0{,}56542\omega_0$ $p_2 = 1{,}4466\omega_0$ $p_3 = 2{,}142\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}675 & 0{,}4273 & -1{,}3283\\ 2{,}1287 & -1{,}0815 & 0{,}6453\end{bmatrix}$
4.3.56	$\frac{1}{72\omega_0^2}\begin{bmatrix}9 & 3 & 1\\ 9 & 6 & 2\\ 9 & 6 & 14\end{bmatrix}$	$p_1 = 2\omega_0$ $p_2 = 2{,}828\omega_0$ $p_3 = 6\omega_0$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1{,}5 & 1 & -2{,}5\\ 4{,}5 & -3 & 0{,}5\end{bmatrix}$

BIBLIOGRAFIE

1. Bereteu L., Smicală I., Tocarciuc A., Mecanică şi Vibraţii, Editura Politehnica, Timişoara, 2006
2. Bereteu L., Smicală I., Mecanică – Dinamică şi aplicaţii. Editura Mirton Timişoara, 1992
3. Brîndeu L., Vibraţii. Litografia Institutului Politehnic „ Tr. Vuia" Timişoara, 1979
4. Buzdugan Gh., Fetcu L., Radeş M., Vibraţiile sistemelor mecanice, Editura Academiei, 1975
5. Craig R., R., Structural Dynamics, John Wiley and Sons, 1981
6. Hegedus A., Drăgulescu D., Probleme de mecanică. Dinamică, Editura Facla Timişoara, 1979
7. Hegedus A., Drăgulescu D., Probleme de mecanică. Statică şi cinematică, Editura Helicon Timişoara, 1993
8. Meirovitch L., Computational methods in structural dynamics, Sythoff – Noordhoff, The Netherlands, 1980
9. Soto W., Theory and problems of mechanical vibrations, Shaum Publishing, New York, 1964
10. Silaş Gh., Brîndeu L., Hegedus A., şi alţii, Culegere de probleme de vibraţii mecanice, Editura Tehnică Bucureşti, 1967
11. Smicală I., Bereteu L., Probleme de mecanică, Editura Mirton Timişoara, 1991
12. Smicală I., Bereteu L., Vibraţii mecanice. Teorie şi probleme, Litografia U.T. Timişoara, 1995
13. Thomson W. T., Theory of vibration, Unwin Hyman Ltd., London, 1989
14. Walshaw A. C., Mechanical vibrations with applications, Ellis Horwood Ltd., 1984